CH 1. LES OSCILLATIONS

ÉQUATIONS LIÉES AU CHAPITRE :

$f = \frac{1}{T}$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$

$t_{sommet} = -\frac{\phi}{\omega}$

$a = -\omega^2 x$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$E = \frac{1}{2}kA^2$

$s = L\theta$

$v_t = v_\theta L$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$v_{max} = \pm\omega A$

$a_{max} = \pm\omega^2 A$

$\theta(t) = A_\theta \cos(\omega t + \phi)$

$v_\theta(t) = -\omega A_\theta \sin(\omega t + \phi)$

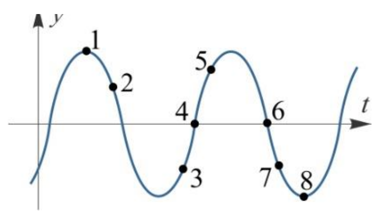
$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

1.1 LES OSCILLATIONS HARMONIQUES SIMPLES

1.1 Question : Graphique $x(t)$ solution ▶

Le graphique qui suit illustre la position en fonction du temps lors du mouvement d'oscillation harmonique d'un corps :



Déterminez le ou les instants où :

a) La position du corps est nulle;
b) L'oscillation complète un premier cycle depuis l'instant $t = 0$;
c) L'objet est le plus éloigné possible de la position centrale;
d) La vitesse du corps est nulle;
e) La position est négative alors que la vitesse est positive;
f) Le module de la vitesse diminue;
g) L'accélération est négative et à sa valeur maximale.

1.2 Question : Pourcentage solution ▶

Durant quel pourcentage de la durée d'un cycle les conditions suivantes sont-elles en vigueur?

a) La position est négative;
b) La vitesse est positive;
c) L'accélération est nulle;
d) La position est positive et la vitesse négative;
e) La position est positive et l'accélération positive.

1.3 Exercice : Paramètres solution ▶

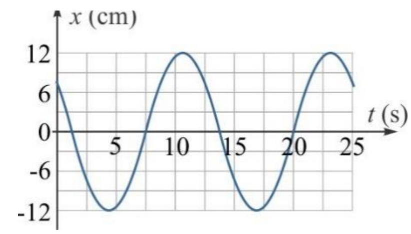
Un mouvement d'oscillation est défini par $x = 8\cos(5t + \pi)$ où le temps est en secondes et les distances en centimètres. Déterminez :

a) L'amplitude des oscillations;
b) La période des oscillations;
c) La position de l'objet en oscillation à $t = 0$.

1.4 Exercice : Graphique solution ▶

Le graphique qui suit représente un mouvement d'oscillation harmonique simple.

a) Déterminez l'amplitude du mouvement.
b) Déterminez la période du mouvement.
c) La constante de phase, sachant que le mouvement obéit à une équation de la forme $x = A\cos(\omega t + \phi)$.
d) Écrivez l'équation de la vitesse en fonction du temps correspondant à ce mouvement.



1.5 Exercice : Double solutions en ligne

Vérifiez à l'aide de ces exercices en ligne si vous maîtrisez le concept de seconde solution des fonctions trigonométriques inverses.

1.6 Exercice : Doublé solution ▶

Un mouvement d'oscillation est représenté par l'équation $y = (4{,}25\text{ cm}) \times \cos\left(1{,}50t + \frac{\pi}{3}\right)$.Que vaudra la période d'oscillation si on fait doubler subitement l'amplitude des oscillations?

1.7 Exercice : Propriétés des ondes en ligne

Essayez ces exercices en ligne pour vérifier si vous maîtrisez les concepts de propriétés des ondes et de constante de phase.

1.8 Exercice : Tremblement de terre solution ▶

Durant un tremblement de terre important, le sommet d'un gratte-ciel a oscillé latéralement. L'accélération maximale du dernier étage durant les oscillations était de 2,50 m/s², et la période était de 4,40 s. Quelle était l'amplitude des oscillations?

1.9 Exercice : Fréquence solution ▶

Un mouvement harmonique présente une fréquence d'oscillation de 17,2 Hz et on observe à $t = 0{,}450$ s une position $x = 4{,}00$ cm et une vitesse nulle. Calculez :

a) la position à $t = 0$;
b) la vitesse à $t = 0{,}450$ s;
c) la position à $t = 1{,}00$ s;
d) la vitesse à $t = 1{,}00$ s;
e) l'accélération à $t = 1{,}00$ s

1.10 Exercice : Masse-ressort à horizontale solution ▶

Une masse sur une surface horizontale sans frottement est attachée à un ressort dont l'autre extrémité est fixe. La masse oscille autour de la position de repos de l'extrémité mobile du ressort, et sa vitesse est de 0,750 m/s en passant à sa position centrale. Il s'écoule 0,940 secondes alors que la masse passe d'une position extrême de son mouvement à l'autre position extrême.

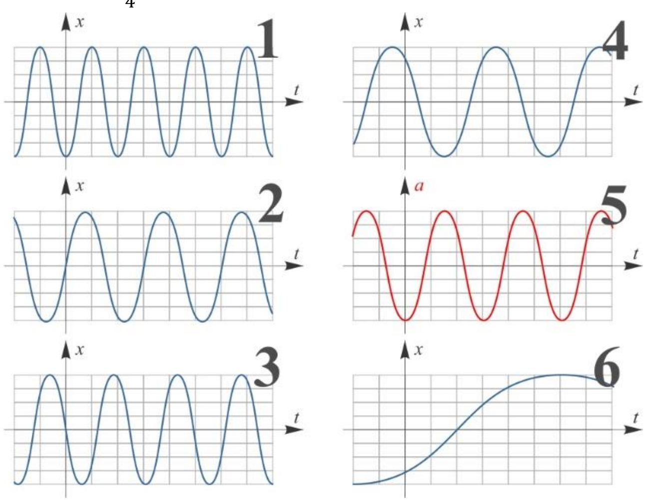
a) Quelle est la période du mouvement de la masse?
b) Quelle est l'amplitude du mouvement?
c) Quel est le module de l'accélération maximale subie par la masse?

1.1- a) #4, #6 — b) #3 — c) #1, #8 — d) #1, #8— e) #3 — f) #5, #7 — g) #1 — **1.2**- a) 50% — b) 50% — c) 0% — d) 25% — e) 0% — **1.3**- a) A = 8 cm — b) T = 1,26 s — c) x = –8 cm — **1.4**- a) A = 12 cm — b) T = 12,5 s — c) ϕ = 0,942 rad ou –5,34 rad — d) v = –6,03 sin(0,503t+3,86) — **1.5**
1.6- T = 4,19 s — **1.7** — **1.8**- A = 1,23 m — **1.9**- a) x = –0,251 m — b) v = 0 cm/s — c) x = –3,87 cm — d) v = –108 cm/s — e) a = 4,52×10⁴ cm/s²
1.10- a) T = 1,88 s — b) A = 0,224 m — c) a_{max} = 2,51 m/s²

1.11 Question : Oscillation d'un corps solution ▶

Soit six graphiques présentant des mouvements d'oscillations définis par $x = A\cos(\omega t + \phi)$. Parmi ces graphiques, indiquez lequel correspond à chacune des valeurs suivantes de constante de phase ϕ :

a) $\phi = \frac{\pi}{2}$ rad
b) $\phi = -\pi$ rad
c) $\phi = \frac{\pi}{4}$ rad
d) $\phi = -\frac{\pi}{2}$ rad
e) $\phi = 0$ rad
f) $\phi = 3\pi$ rad
g) $\phi = -\frac{3\pi}{2}$ rad
h) $\phi = -\frac{5\pi}{4}$ rad



1.12 Question : Constante de phase solution ▶

Un objet en oscillation est momentanément immobile à $x = 43{,}5$ cm et se déplace jusqu'à la $x = 11{,}3$ cm où il s'immobilise à nouveau, 1,40 s plus tard.

a) Quelle est l'amplitude du mouvement de cet objet?
b) Quelle est sa période?
c) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il passe à $x = 38{,}0$ cm pour la première fois?

1.13 Exercice : $\Delta\Phi$ solution ▶

Un certain mouvement d'oscillation harmonique présente une période de 4,50 s. Si on étudie une portion du mouvement de 2,85 s, de quelle quantité la phase évolue-t-elle durant cet intervalle?

1.14 Exercice : La phase en ligne

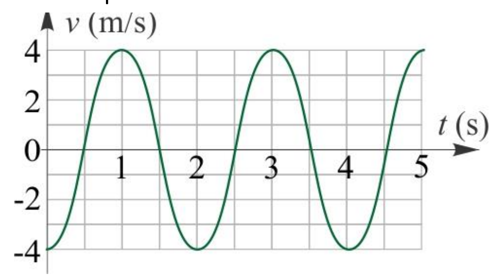
Essayez ces exercices en ligne pour vérifier si vous maîtrisez le concept de phase.

1.15 Exercice : Amplitude & Période solution ▶

Un système masse-ressort vertical est mis en mouvement en lâchant la masse après l'avoir tirée vers le bas d'une certaine distance, à $t = 0$. Après 0,125 s, la masse passe à la position $y = -5{,}00$ cm une première fois. À $t = 0{,}675$ s, la masse passe à $y = 5{,}00$ cm une première fois. Déterminez l'amplitude et la période du mouvement.

1.16 Exercice : $v(t)$ solution ▶

Le graphique suivant représente la vitesse en fonction du temps pour un corps en oscillation harmonique autour de $z = 0$. Écrivez l'équation de la position de ce corps en fonction du temps.



1.2 LE SYSTÈME MASSE-RESSORT

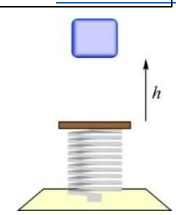
1.17 Question : Systèmes A et B solution ▶

Deux systèmes masse-ressort A et B sont mis en mouvement simultanément avec des amplitudes identiques. Dans le système B, la constante de rappel est 2 fois plus grande, et la période d'oscillation observée vaut 75% de la période du système A.

a) Quel est le rapport des masses $\frac{m_A}{m_B}$?
b) Quel est le rapport des vitesses des deux masses lors de leurs passages à leurs positions centrales respectives $\frac{v_A}{v_B}$?

1.18 Exercice : Ressort vertical solution ▶

On laisse tomber une masse de 500 g d'une hauteur de 25,0 cm sur une plateforme supportée par un ressort dont la constante de rappel est de 75,5 N/m. (Négligez la masse de la plateforme et du ressort.)



a) Quelle est la vitesse de la masse lorsqu'elle entre en contact avec la plateforme?
b) À quelle distance sous le niveau initial de la plateforme se trouve la position d'équilibre de la masse reposant sur le ressort?
c) Quelle sera la distance de compression maximale du ressort, par rapport à son état initial?

1.19 Exercice : Rappel solution ▶

On veut déterminer la constante de rappel d'un ressort en y suspendant une masse de 100 g qui oscille à raison de 12,7 s pour effectuer 10 oscillations. Quelle est la constante de rappel de ce ressort?

1.20 Exercice : Vieille voiture solution ▶

Alors que vous êtes en auto, vous apercevez devant vous une vieille voiture dont les amortisseurs arrière semblent totalement inefficaces. Chaque fois que l'auto est secouée par un cahot de la route, l'arrière se met à osciller de haut en bas et effectue 4 oscillations complètes en 5,00 s. Chacun des deux ressorts de la suspension arrière de ce véhicule a une constante de rappel de 10,0 kN/m. Quelle est la masse équivalente de l'arrière de la voiture?

1.21 Exercice : Deux scénarios solution ▶

À un système masse-ressort aux propriétés inconnues, on observe que si on ajoute 50 g à la masse en oscillation, la période augmente de 25 %. Quelle était la valeur initiale de la masse en oscillation?

1.11 - a) #3 — b) #1 — c) #4 — d) #2 — e) #5 — f) #1 — g) #3 — h) #6 — **1.12** - a) A = 16,1 cm — b) T = 2,80 s — c) y = -27,2 cm/s
1.13 - $\Delta\phi$ = 3,98 rad — **1.14** — **1.15** - T = 1,60 s et A = 5,67 cm — **1.16** - z = 1,27 cos($\pi t+\pi/2$) — **1.17** - a) m_A/m_B = 0,888… — b) v_A/v_B = 0,75
1.18 - a) v = 2,21 m/s — b) d = 6,50 cm — c) d_{max} = 25,7 cm — **1.19** - k = 2,45 N/m — **1.20** - m_{tot} = 792 kg — **1.21** - m_A = 0,0888… kg

1.22 Exercice : Cinématique solution ▶

Une masse de 200 g oscille suspendue à un ressort dont la constante de rappel est inconnue. À un certain instant, la position de la masse est $x = -2{,}00$ cm, elle a une vitesse $v = -4{,}00$ m/s et son accélération est $a = 6{,}00$ m/s². Déterminez :

a) La constante de rappel du ressort utilisé;
b) L'amplitude du mouvement;
c) La fréquence f;
d) La constante de phase du mouvement si les mesures sont faites à $t = 0{,}100$ s.

1.3 L'ÉNERGIE DANS LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE

1.23 Question : Combien de fois solution ▶

Combien de fois par cycle les événements suivants se produisent-ils :

a) La vitesse de la masse en oscillation est nulle;
b) La masse se trouve à une distance $d = ½A$ de l'origine;
c) L'énergie potentielle du système est nulle;
d) L'énergie mécanique est nulle;
e) Le module de l'accélération de la masse est maximal;
f) L'énergie cinétique du système est maximale;
g) L'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique;
h) L'énergie potentielle est égale à l'énergie mécanique.

1.24 Question : Doubler l'énergie solution ▶

Si on double l'énergie d'un système masse-ressort en oscillation, comment varie :

a) la période?
b) l'amplitude?
c) la vitesse maximale?

1.25 Exercice : Énergie initiale solution ▶

On donne 15,0 J d'énergie à un système masse-ressort impliquant une masse de 125 g et un ressort de 52,5 N/m.

a) Quelle est la période du système?
b) Quelle est l'amplitude des oscillations?

1.26 Exercice : Énergie mécanique solution ▶

Une masse de 170 g oscille à l'extrémité d'un ressort dont la constante de rappel est 2,50 N/m, avec une amplitude de 38,3 cm. On démarre un chronomètre au moment où la masse passe par la position centrale de son mouvement. À l'instant 1,00 s, déterminez :

a) L'énergie potentielle du système;
b) L'énergie cinétique du système;
c) L'énergie mécanique du système.

1.4 LES PENDULES

1.27 Exercice : Le Panthéon solution ▶

Au Panthéon de Paris se trouve un pendule simple dont la masse est de 28 kg et la longueur du fil, 67,0 m. Que vaut théoriquement sa période?

1.28 Exercice : Gravité solution ▶

Soit un pendule de longueur L. Qu'adviendra-t-il de sa période d'oscillation si :

a) Le même pendule est installé sur la Lune où l'accélération gravitationnelle est six fois moindre;
b) Le même pendule est suspendu au plafond d'un ascenseur accélérant vers le haut à 2,00 m/s²;
c) Le pendule est suspendu au plafond d'une caisse qu'on laisse tomber en chute libre verticale;
d) On double la longueur de la corde;
e) On double la masse qui compose le pendule.

1.29 Exercice : Une seconde solution ▶

Quelle longueur devrait avoir exactement le fil d'un pendule pour que sa période soit exactement d'une seconde?

1.30 Exercice : Pendule solution ▶

Un pendule simple de 90,0 g est en oscillation avec une amplitude de 8,50°. Sa corde mesure 28,0 cm et on le lance à partir de sa position la plus éloignée. Déterminez :

a) La fréquence angulaire du pendule;
b) La période d'oscillation;
c) La constante de phase (s'il est lâché du côté positif);
d) L'énergie du pendule;
e) Sa vitesse maximale en passant au point le plus bas;
f) Sa vitesse à $\theta = 5{,}00°$.

1.31 Exercice : Question angulaire solution ▶

Un pendule simple a une longueur de 0,620 m et sa vitesse tangentielle au point le plus bas est de 1,20 m/s. (Considérez le pendule comme harmonique). Trouvez:

a) L'amplitude angulaire en degrés;
b) Le plus court temps pour passer de la position verticale à la position angulaire 0,150 rad.

1.32 Exercice : g solution ▶

On conçoit à Québec un pendule dont la période est exactement 1,000 00 s. L'accélération gravitationnelle mesurée à Québec est 9,807 14 m/s². Le même pendule installé à Mexico présente plutôt une période de 1,00144 s. Quelle est l'accélération gravitationnelle à Mexico? (Conservez toute la précision disponible pour garantir un résultat précis.)

1.33 Exercice : Tarzan solution ▶

En sautant d'un arbre à l'autre à l'aide d'une liane, Tarzan (78,7 kg) est momentanément un pendule. Il attrape une liane de 5,70 m faisant un angle de 40,0° alors qu'il se laisse tomber d'une branche. Soumis à la résistance de l'air, il perd 234 Joules durant son balancement vers une autre branche. Quel angle maximal fera la corde avant qu'il ne s'immobilise à nouveau?

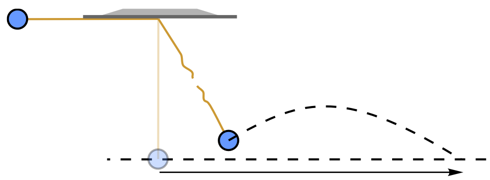
1.34 Exercice : Démonstration solution ▶

Démontrez que l'angle auquel la hauteur d'un pendule vaut la moitié de sa hauteur maximale, en fonction de l'angle maximal (l'amplitude θ_{max}), peut être défini par l'équation $2\cos\theta - \cos\theta_{max} = 1$.

1.22- a) $k = 60$ N/m — b) $A = 23{,}2$ cm — c) $f = 2{,}76$ Hz — d) $\phi = -0{,}0749$ rad
1.23- a) 2 fois — b) 4 fois — c) 2 fois — d) 0 fois — e) 2 fois — f) 2 fois — g) 4 fois — h) 2 fois — **1.24**- a) $T' = T$ — b) $A' = \sqrt{2}A$ — c) $v' = \sqrt{2}v$
1.25- a) $T = 0{,}307$ s — b) $A = 0{,}756$ m — **1.26**-a) $U = 0{,}0749$ J — b) $K = 0{,}108$ J — c) $E = 0{,}183$ J — **1.27**- $T = 16{,}4$ s
1.28- a) $T' = 2{,}45\ T$ — b) $T' = 0{,}911T$ — c) $T = Ø$ — d) $T' = 1{,}41T$ — e) $T' = T$ — **1.29**- $L = 24{,}8$ cm
1.30- a) $\omega = 5{,}92$ rad/s — b) $T = 1{,}06$ s — c) $\phi = 0$ — d) $E = 0{,}00272$ J — e) $v_t = -0{,}246$ m/s — f) $v_t = -0{,}199$ m/s — **1.310**- a) $\theta_{max} = 27{,}9°$ — b) $t = 0{,}0788$ s
1.32- $g_{Mexico} = 9{,}77896$ m/s² — **1.33**- $\theta = 35{,}0°$ — **1.34**- …

1.35 Exercice : Pendule de lancement solution ▶

Un pendule constitué d'une corde de 1,10 m est lâché à partir de la position horizontale. Lors de la remontée après avoir traversé la position verticale, la corde se rompt lorsque la corde fait un angle de 30,0° avec la verticale et le pendule devient un projectile. À quelle distance horizontale touchera-t-il le sol à partir du point sous sa position d'équilibre?



1.5 LES OSCILLATIONS AMORTIES, LES OSCILLATIONS FORCÉES ET LA RÉSONANCE

1.36 Question : Amortissement solution ▶

Déterminez, parmi les systèmes oscillants suivants, ceux qui doivent être volontairement amortis, volontairement entretenus ou laissés libres, pour qu'ils fonctionnent de manière adéquate ou comme on les connait :

a) les ressorts de suspension d'une voiture;
b) le pendule d'une horloge grand-père;
c) le pont suspendu Pierre-Laporte;
d) une chaise berçante;
e) les cordes d'une guitare;
f) une voiture qu'on tente de dégager de la neige en la poussant dans un mouvement de va-et-vient.

1.37 Question : Souffle solution ▶

Vous réalisez une expérience avec cinq pendules simples différents pris individuellement. Toutes les deux secondes et durant une demi-seconde, vous soufflez sur le pendule pour provoquer les oscillations. Les longueurs respectives des pendules sont de 15 cm, 25 cm, 50 cm, 1,00 m et 2,00 m. Lesquels sont susceptibles d'osciller de façon continue avec une amplitude constante?

1.38 Exercice : Haut-parleur solution ▶

Le caisson d'extrême graves d'un système de son (haut-parleur communément appelé *subwoofer*) est calibré pour optimiser la production de son à une fréquence bien particulière. Un exemplaire de ce type de haut-parleur est constitué d'un cône ayant une masse de 15,0 g. Son système de suspension et le volume d'air du caisson derrière le cône produisent, lors du mouvement, le même effet qu'un ressort d'une constante de rappel de 30,0 N/cm. Si la résonance se produit efficacement pour des fréquences sonores jusqu'à 10,0 % inférieures ou supérieures à la fréquence naturelle d'oscillation du cône, quelles sont les fréquences sonores les mieux reproduites par ce haut-parleur?

1.35 - d = 2,42 m — **1.36** - a) Vol. amort. — b) Vol. entr. — c) Vol. amort. — d) Vol. entr. — e) Libres — f) Vol. entr.
1.37 - 25 cm et 1,00 m — **1.38** - 64,1 Hz < f < 78,3 Hz

CH 1. LES OSCILLATIONS

1.1 LES OSCILLATIONS HARMONIQUES SIMPLES

1.1 Solution : Graphique $x(t)$

retour à la question ▲

a) Les points 4 et 6.

Puisque le graphique est directement celui de la position en fonction du temps, on cherche des points qui se trouvent vis-à-vis $y = 0$, doit les points 4 et 6.

b) Le point 3.

Le premier cycle complet, à partir de n'importe quel instant, se trouve lorsque le moment repasse par le même état. À $t = 0$, le corps a une position négative, en se dirigeant vers l'origine ($y = 0$). C'est au point 3 que la position est la même, avec une vitesse orientée dans la même direction.

c) Les points 1 et 8.

La position centrale étant $y = 0$, c'est aux points 1 et 8 que la masse est le plus loin de cette position (indépendamment du sens de cet éloignement.

d) Les points 1 et 8.

C'est en atteignant les positions extrêmes du mouvement que la masse s'immobilise pour inverser son mouvement. C'est donc aux points 1 et 8 que ça se produit.

D'un autre point de vue, la vitesse étant donnée par la pente de la courbe de position en fonction du temps, c'est aux points 1 et 8 que la pente est nulle, momentanément.

e) Le point 3.

Dans un premier temps, une position négative signifie un point situé sous $y = 0$, soit sous l'axe horizontal (excluant les points 4 et 6). Ensuite, une vitesse positive implique une pente positive de la courbe de position en fonction du temps. Seul le point 3, parmi les points sous l'axe, se qualifie aux deux conditions.

f) Les points 5 et 7.

Le mot « module » fait qu'on ne tient pas compte du signe ou du sens de la vitesse. Un module de vitesse décroissant signifie une vitesse qui s'approche d'une vitesse nulle (avec le temps qui avance). Les points 5 et 7 représentent des instants où la vitesse n'est pas nulle, mais deviendra bientôt nulle (soit au sommet qui suit le point 5 et le creux qui suite le point 7). La vitesse qui était maximale aux points 4 et 6 est donc en décroissance jusqu'aux sommets suivants, en passant par les instants 5 et 7 où la vitesse est décroissante.

De façon plus discutable, les points 4 et 6 pourraient être perçus comme le début de la décroissance de la vitesse, mais ils appartiennent autant aux portions de croissance qui les précèdent qu'aux portions de décroissance qui les suivent. Mathématiquement, les points 4 et 6 sont des points d'inflexion où la courbure n'est ni dans un sens ni dans l'autre; le module de la vitesse, à ces instants, serait réputé constant (pour un instant de durée nulle).

g) Le point 1.

Une accélération négative correspond à un corps attiré vers le bas (vers les y négatifs), donc à un corps qui monte de moins en moins vite ou qui descend de plus en plus vite. C'est donc dans le domaine $y > 0$ que ça se produit, soit au-dessus de l'axe horizontal. Par ailleurs, l'accélération est nulle lors des croisements d'axe, ce qui laisse deviner qu'elle est maximale au sommet de la courbe, soit au point 1.

D'un autre point de vue, si on imagine que les oscillations sont celles d'une masse fixée à un ressort, on comprend que c'est lorsque la masse est la plus loin de sa position d'équilibre que le ressort est le plus tendu et que sa force est la plus grande, produisant ainsi l'accélération la plus grande. Et c'est lorsque la position de la masse est positive que le ressort agit sur elle pour la ramener vers la position négative (accélération négative).

Finalement, les équations du mouvement harmonique relient l'accélération à la position par : $a = -\omega^2 x$. Il est évident selon cette équation que c'est lorsque la position est maximale et positive que l'accélération est maximale et négative.

retour à la question ▲

retour à la question ▲

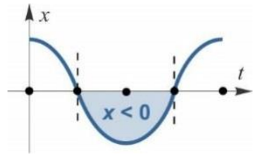
retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.2 Solution : Pourcentage retour à la question ▲

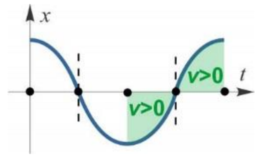
a) 50%

La position est négative durant toute la portion du cycle pour laquelle la courbe $x(t)$ se trouve sous l'axe horizontal (voir figure si contre).



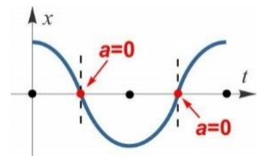
b) 50%

La vitesse est positive durant la portion du cycle pour laquelle la pente de la courbe $x(t)$ est positive. L'objet se déplace vers les x positifs (voir figure ci-contre).



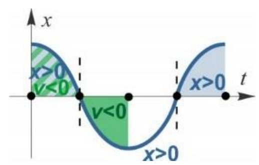
c) 0%

L'accélération est nulle à certains instants sans durée, lorsque le corps en oscillation passe par sa position centrale (position d'équilibre). Partout ailleurs, le système subit une force de rappel l'attirant vers cette position d'équilibre, et subit donc une accélération. Ces deux instants où l'accélération est nulle n'ayant aucune durée, le pourcentage qu'ils représentent dans la durée d'un cycle est nulle (voir figure ci-contre).



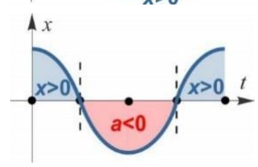
d) 25%

La vitesse est négative lorsque la courbe $x(t)$ présente une pente négative, soit durant la moitié du cycle lorsque la courbe passe du sommet vers le creux suivant. Cependant, la position n'est positive que durant la moitié de cette phase (voir figure ci-contre).



e) 0%

Les position et accélération ne sont jamais positives en même temps. Sur le graphique ci-contre, les durées où la position est positive (colorées en bleu) et les durées où l'accélération est négative (rouge) ne se chevauchent pas. L'équation $a = -\omega^2 x$ montre bien cette opposition permanente des signes de x et a (puisque la fréquence angulaire est par définition positive).



retour à la question ▲

1.3 Solution : Paramètres retour à la question ▲

On doit comparer l'équation fournie à l'équation générale du mouvement harmonique simple : $x = A\cos(\omega t + \phi)$. Ainsi, on trouve :

a) A = 8 cm

Le coefficient devant le cosinus représente directement l'amplitude du mouvement (et il est indiqué que les distances sont en centimètres).

b) T = 1,26 s

La période n'est pas comprise directement dans l'équation mais est liée à la fréquence angulaire ω valant 5 rad/s selon l'équation fournie :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \mathbf{1,26\ s}$$

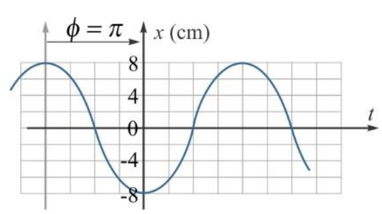
c) x = –8 cm

Connaissant l'amplitude et la fréquence angulaire, il suffit de résoudre l'équation pour déterminer x lorsque t = 0 :

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = 8\cos(5t + \pi) = 8\text{ cm} \times \cos\left(5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0 + \pi\right) = \mathbf{-8\ cm}$$

Solution alternative :

Si on trace la courbe liée à cette équation, on constate que la constante de phase $\phi = \pi$ entraîne un décalage précis d'un demi-cycle vers l'avant de l'instant t = 0 sur la courbe de cosinus. Ainsi, l'axe vertical (l'instant t = 0) se retrouve vis-à-vis un creux au lieu d'un sommet (voir graphique ci-contre).



On peut alors constater sans calculs que la position à t = 0 est $x = -A$, donc x = –8 cm.

retour à la question ▲

1.4 Solution : Graphique retour à la question ▲

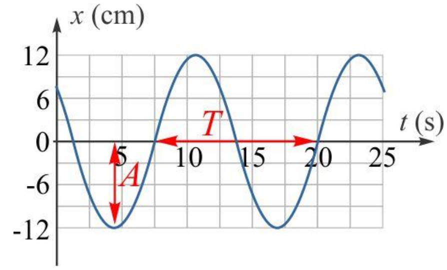
a) A = 12 cm

Les sommets (comme les creux) de l'onde se trouvent à 12 cm de la position centrale (0 cm). Cette valeur est donc directement l'amplitude.

b) T = 12,5 s

Il semble que seuls les points à t = 7,5 s et à t = 20 s passent par une position précise du quadrillage. À partir de ces positions de la courbe, on constate que la courbe prend 12,5 s pour repasser par la même phase. La période est donc T = 12,5 s.

c) ϕ = 0,942 rad ou ϕ = –5,34 rad (sont équivalentes)



La période permettant de déterminer la fréquence angulaire ω, il suffit de choisir un point de la courbe pour lequel on connait à la fois le temps et la position, et la constante de phase ϕ sera la seule inconnue. Puisque seuls les points à t = 7,5 s et à t = 20 s passent par une position précise du quadrillage, l'un de ces points fournira la solution la plus simple.

Avec $x_{t=7,5} = 0\text{ cm}$:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t, \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Avec les valeurs pour le point à t = 20 s :

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t \quad = \quad \cos^{-1}\left(\frac{0\text{ cm}}{12\text{ cm}}\right) - \frac{2\pi}{12{,}5\text{ s}} \times 7{,}5\ s \quad = \quad -2{,}20\text{ rad} \qquad (-2{,}19911485751\text{ rad}) \qquad (1)$$

Attention! La fonction « cos^{-1} » admet deux solutions et on doit vérifier si la solution obtenue est la bonne. Une manière de le vérifier est de calculer la vitesse qui correspond à cette valeur de la constante de phase. Selon le graphique du mouvement, on voit à t = 7,5 s que la vitesse est positive (pente positive de $x(t)$ à t = 7,5 s), et la bonne constante de phase devrait confirmer ce fait; si on calcule la vitesse avec la constante de phase trouvée :

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \quad = \quad -\frac{2\pi}{T}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t + \phi\right)$$

$$v = -\frac{2\pi}{12{,}5\text{ s}} \times (12\text{ cm}) \times \sin\left(\frac{2\pi}{12{,}5\text{ s}} \times 7{,}5\text{ s} + (-2{,}20\text{ rad})\right) \quad = \quad -6{,}03\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \qquad (-6{,}03185789489)$$

On n'obtient pas la vitesse positive attendue. La constante de phase ϕ = –2,20 rad est donc incohérente avec le mouvement décrit par le graphique. On doit donc utiliser la seconde solution de la fonction « cos^{-1} ». Les deux solutions d'un « cos^{-1} » sont « θ » et « $-\theta$ », mais attention, la valeur +2,20 rad n'est pas pour autant la seconde solution! Si on évalue séparément la seconde solution du cos^{-1}, on a :

$$\cos^{-1}\left(\frac{0}{12\ cm}\right) = \cos^{-1} 0 \quad = \quad \begin{array}{l} \rightarrow \ \frac{\pi}{2} \\ \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

On reprend donc l'équation (1) avec cette seconde solution de « cos^{-1} » :

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{0\text{ cm}}{12\text{ cm}}\right) - \frac{2\pi}{12{,}5\ s} \times 7{,}5\ s \quad = \quad -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{12{,}5\ s} \times 7{,}5\ s \quad = \quad \mathbf{-5{,}34\ rad} \qquad (-5{,}3407075111)$$

Une valeur correcte pour la constante de phase serait donc ϕ = –5,34 rad.

Facultativement (parfois c'est exigé), on peut exprimer cette constante de phase par un angle compris entre 0 et +2π en ajoutant « 2π » à cette valeur négative :

$$\phi = -11{,}6\text{ rad} + 2\pi \quad = \quad \mathbf{0{,}942\ rad}$$

Selon cette 2e, ϕ est compris entre 0 et 2π et ce serait la meilleure réponse.

d) $v = -6{,}03\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \times \sin(0{,}503 \times t + 0{,}942\text{ rad})$

L'équation de la vitesse lors d'une oscillation harmonique est de la forme $v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$ et a été développée en c) dans l'évaluation rigoureuse de la constante de phase. En y insérant les valeurs connues de la fréquence angulaire et de la constante de phase, on trouve :

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \quad = \quad -\left(\frac{2\pi}{12{,}5\text{ s}}\right) \times 12\text{ cm} \times \sin\left(\left(\frac{2\pi}{12{,}5\text{ s}}\right)\cdot t + 0{,}942\text{ rad}\right)$$

$$v = \mathbf{-6{,}03\,\frac{cm}{s} \times \sin(0{,}503 \times \mathit{t} + 0{,}942\ rad)}$$

retour à la question ▲

retour à la question ▲
retour à la question ▲
retour à la question ▲

1.5 Solution : Double solutions en ligne

Seconde solution des fonctions trigonométriques inverses

1.6 Solution : Doublé

retour à la question ▲

T = 4,19 s

La période d'oscillation n'est pas influencée par l'amplitude. La période est donc inchangée, mais encore faut-il la déterminer à partir de la fréquence angulaire connue :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}50\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \mathbf{4{,}19\ s}$$

retour à la question ▲

1.7 Solution : Propriétés des ondes en ligne

retour à la question ▲

Propriétés des ondes et constante de phase

1.8 Solution : Tremblement de terre

retour à la question ▲

$A = 1{,}23\,\text{m}$

La période T = 4,4 s permet de déterminer la fréquence angulaire des oscillations : $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

L'accélération lors du mouvement harmonique est liée à la position par :

$$a = -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

Puisque l'accélération donnée est l'accélération maximale, on peut appliquer cette équation aux valeurs maximales d'accélération et position (auquel cas le signe disparaît) :

$$a_{max} = \left|-\frac{4\pi^2}{T^2}x_{max}\right| = \frac{4\pi^2}{T^2}x_{max}$$

$$A = x_{max} = \frac{a_{max}T^2}{4\pi^2} = \frac{2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times(4{,}4\ \text{s})^2}{4\pi^2} = \mathbf{1{,}23\ m}$$

retour à la question ▲

1.9 Solution : Fréquence

retour à la question ▲

Trouvons d'abord les paramètres permettant de construire les équations de la position, de la vitesse et de l'accélération.

Si la vitesse est nulle à t = 0,450 s, ça signifie que la masse est à l'une de ses positions maximales. L'amplitude est donc connue, celle qui est donnée pour cet instant : A = 4,00 cm.

La fréquence angulaire ω peut être calculée rapidement à partir de la fréquence f :

$$\omega = 2\pi f \quad = \quad 2\pi \times 17{,}2\ \mathrm{s}^{-1} \quad = \quad 108\ \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \qquad (108{,}070787283)$$

L'équation de la position en fonction du temps étant $x = A\cos(\omega t + \phi)$, et la position étant connue à t = 0,450 s, le seul paramètre encore inconnu est ϕ. On peut le déterminer :

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t$$

À t = 0,450 s, $x = A$, donc :

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{A}{A}\right) - \omega t \quad = \quad \cos^{-1}(1) - 2\pi f \cdot t \quad = \quad 0 - 2\pi\ \mathrm{rad} \times 17{,}2\ \mathrm{s}^{-1} \times 0{,}450\ \mathrm{s} \quad = \quad -48{,}6\ \mathrm{rad}$$

(−48,6318542776)

Il n'y a pas deux solutions à ce cosinus inverse car pour $\cos^{-1}(1)$, les deux solutions coïncident.

Le fait que $|\phi|$ soit supérieur à 2π n'est pas un problème. Ça indique seulement que plus d'un cycle ont eu lieu depuis t = 0 jusqu'à l'instant étudié. Si on ajoute des cycles complets à cette valeur jusqu'à ce qu'on obtienne une valeur comprise entre 0 et 2π (il faut en ajouter 8), on obtiendra :

$$-48{,}6\ \mathrm{rad} + 8 \times (2\pi) \quad = \quad 1{,}63\ \mathrm{rad} \qquad (1{,}63362817987)$$

Cette constante de phase est équivalente car elle entraîne une courbe identique. Il n'est donc pas nécessaire de faire cette transformation. Cependant, si on ne conserve que trois chiffres significatifs à nos valeurs, –48,6 est moins précise que 1,63 (précise aux dixièmes plutôt qu'aux centièmes de radian), et entraîne des écarts non négligeables dans les résultats. Il est donc préférable de garder toute la précision disponible en tout temps, pour ne pas avoir à chaque fois à vérifier si la précision sacrifiée cause problème.

Les équations de ce mouvement sont donc :

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad x = 4{,}00 \times \cos(108 \cdot t - 48{,}6)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad v = -(2\pi \times 17{,}2) \times \sin(\omega t + \phi) \quad = \quad -432 \times \sin(108 \cdot t - 48{,}6)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad a = -(2\pi \times 17{,}2)^2 \times \cos(\omega t + \phi) \quad = \quad -(4{,}67 \times 10^4) \times \cos(108 \cdot t - 48{,}6)$$

Les distances sont en centimètres et le temps en secondes.

****Attention!** : pour tous les calculs suivants, il est important de conserver toute la précision des valeurs utilisées. Utiliser des valeurs arrondies au 3e chiffre significatif donnera des résultats complètement différents! Utilisez la fonction de mémorisation de votre calculatrice (procédure ici). En l'occurrence, la constante de phase ϕ vaut précisément –48,631854... rad, et la fréquence angulaire ω vaut 108,070787... rad/s.

a) x = –0,251 cm

À t = 0 : $x = 4{,}00 \times \cos(108 \times 0 - 48{,}6) \quad = \quad \mathbf{-0{,}251\ cm}$

b) v = 0 cm/s

À t = 0,450 : $v = -432 \times \sin(108 \times 0{,}450 - 48{,}6) \quad = \quad \mathbf{0\ \tfrac{cm}{s}}$

En fait, l'énoncé le dit, que la vitesse à t = 0,450 s est nulle. Le calcul n'est qu'une confirmation que les données utilisées sont bonnes.

c) x = –3,87 cm

À t = 1,00 : $x = 4{,}00 \times \cos(108 \times 1{,}00 - 48{,}6) \quad = \quad \mathbf{-3{,}87\ cm}$

d) v = –108 cm/s

À t = 1,00 : $v = -432 \times \sin(108 \times 1{,}00 - 48{,}6) \quad = \quad \mathbf{-108\ \tfrac{cm}{s}}$

e) a = 4,52×10⁴ cm/s²

À t = 1,00 : $a = -(4{,}67 \times 10^4) \times \cos(108 \times 1{,}00 - 48{,}6) \quad = \quad \mathbf{4{,}52 \times 10^4\ \tfrac{cm}{s^2}}$

retour à la question ▲

retour à la question ▲ retour à la question ▲ retour à la question ▲

1.10 Solution : Masse-ressort à l'horizontale

retour à la question ▲

a) *T* = 1,88 s

Il s'écoule 0,94 s entre les passages aux positions extrêmes opposées de la masse. La période étant la durée d'un cycle complet, c'est aussi la durée d'un aller-retour à l'une des positions extrêmes du mouvement. C'est donc le double de la durée de 0,94 s où la masse ne fait qu'un aller d'une position extrême à l'autre :

$$T = 2 \times 0{,}94\, s \quad = \quad \mathbf{1,88\ s}$$

b) *A* = 0,224 m

La vitesse de la masse à sa position centrale est également sa vitesse maximale et la vitesse est liée à la position par :

$$v = -\omega A \sin(\Phi)$$

La vitesse maximale est donc (en module) : $|v_{max}| \quad = \quad \omega A.$

La fréquence angulaire ω peut être exprimée en fonction de la période connue, et on peut ensuite isoler l'amplitude *A* :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A = \frac{v_{max}}{\omega} \quad = \quad \frac{v_{max}}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)} \quad = \quad \frac{v_{max}T}{2\pi} \quad = \quad \frac{0{,}750\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 1{,}88\, s}{2\pi} \quad = \quad \mathbf{0,224\ m}$$

c) a_{max} = 2,51 m/s²

L'accélération étant liée à la position, l'accélération <u>maximale</u> est liée à la position <u>maximale</u> (l'amplitude) :

$$a = -\omega^2 x \qquad \Rightarrow \qquad a_{max} = |-\omega^2 A| \quad = \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{v_{max}T}{2\pi}\right) \quad = \quad \frac{2\pi v_{max}}{T}$$

$$a_{max} = \frac{2\pi \times 0{,}750\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}88\, s} \quad = \quad \mathbf{2,51\ \frac{m}{s^2}}$$

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.11 Solution : Oscillation d'un corps retour à la question ▲

Dans chaque cas, il y a plusieurs manières de relier la constante de phase à un graphique du mouvement harmonique et les deux manières seront présentées.

1) L'une des techniques consiste à évaluer la fraction de cycle que ϕ représente (appelons-la α) et la comparer à la fraction de cycle (ou de période) dont l'axe vertical est décalé, selon la relation suivante :

$$\text{Fraction de cycle} = \alpha = \frac{\phi}{2\pi}$$

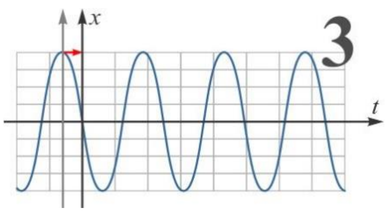
Aussi, on tient compte du fait qu'une constante de phase positive entraîne un décalage vers la droite de l'axe vertical, et vice-versa.

2) La deuxième approche est similaire et utilise la même fraction, mais consiste à quantifier le temps du décalage de la courbe à l'aide de la période et des graduations du graphique. La distance temporelle du décalage sur le graphique est $\Delta t = -\frac{\phi}{\omega} = -\alpha T$. Sur un graphique, on exprime la durée du cycle (période) en graduations et on valide si le décalage du sommet coïncide avec le délai (nombre de graduations) correspondant.

Cependant, cette approche n'est pas plus rapide si on dispose de plusieurs graphiques dont il faut reconnaître le bon. C'est cependant une bonne manière de valider la réponse trouvée selon la première approche.

retour à la question ▲

a) Graphique 3



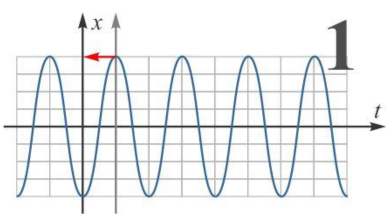
$$\alpha = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = +\frac{1}{4}$$

1) Puisque $\phi > 0$, on cherche un graphique où l'axe vertical est décalé vers la droite d'un quart de cycle. Après un quart de cycle d'une courbe de cosinus, la courbe rencontre l'axe horizontal en descendant. Cette rencontre doit donc maintenant coïncider avec $t = 0$ et seul le graphique 3 présente cette particularité.

2) Validation : Sur le graphique 3, la période a une durée de 2,5 graduations. Le quart de cette quantité est 0,625 grad. ou $\frac{5}{8}$, et le graphique 3 montre bien un axe vertical décalé vers la droite de $\frac{5}{8}$ de graduation.

retour à la question ▲

b) Graphique 1



$$\alpha = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{-\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

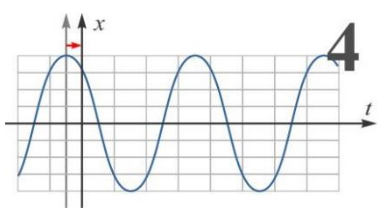
1) Puisque $\phi < 0$, on cherche un graphique où l'axe vertical est décalé vers la gauche d'un demi-cycle. C'est donc vis-à-vis un creux situé un demi-cycle à droite du sommet de référence que se trouve l'axe vertical ($t = 0$). Le graphique 1 est seul à présenter cette particularité.

Attention! Le graphique 5 présente aussi un creux à t = 0, mais il s'agit d'un graphique de l'accélération en fonction du temps, et celle-ci ne se comporte pas comme la position. Le graphique 5 ne représente donc pas une constante de phase de –π.

2) Validation : Sur le graphique 1, la période a une durée de 2 graduations. La moitié de cette quantité est 1 grad. et le graphique 1 montre bien un axe vertical décalé vers la gauche d'une graduation.

retour à la question ▲

c) Graphique 4



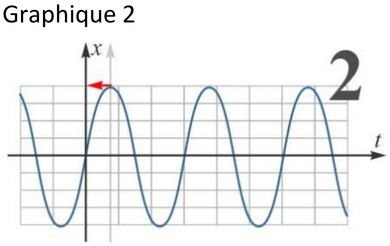
$$\alpha = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\pi} = \frac{1}{8}$$

1) Puisque $\phi > 0$, on cherche un graphique où l'axe vertical est décalé vers la droite d'un huitième de cycle. Après un huitième de cycle d'une courbe de cosinus, la courbe est à mi-temps entre le sommet de départ et la rencontre de l'axe horizontal, en descendant. Cela doit maintenant coïncider avec $t = 0$ et seul le graphique 4 présente cette particularité.

Attention! À mi-temps entre un sommet et un croisement d'axe, la position de la courbe n'est pas à mi-chemin entre le sommet et l'axe horizontal, car la descente n'est pas régulière ($v \neq cte$).

2) Validation : Sur le graphique 4, la période a une durée de 4 graduations. Le huitième de cette quantité est 0,5 grad. ou ½ et le graphique 4 montre bien un axe vertical décalé vers la droite de la moitié d'une graduation.

d) Graphique 2



$$\alpha = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = -\frac{1}{4}$$

1) Puisque $\phi < 0$, on cherche un graphique où l'axe vertical est décalé vers la gauche d'un quart de cycle. Un quart de cycle à gauche d'un sommet, on trouve un croisement de l'axe vertical ($x = 0$) en montant, et c'est ce croisement d'axe qui se trouve maintenant vis-à-vis l'instant ($t = 0$). Le graphique 2 présente cette particularité.

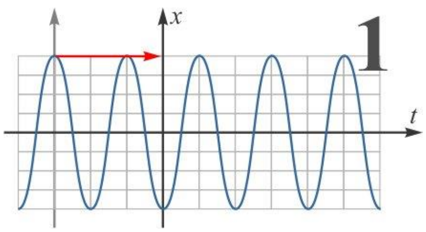
2) Validation : Sur le graphique 2, la période a une durée de 3 graduations. Le quart de cette quantité est 0,75 grad ou ¾, et le graphique 2 montre bien un sommet décalé vers la droite de ¾ de graduation.

retour à la question ▲

e) Graphique 5

Une constante de phase nulle correspond à une courbe de cosinus sans décalage, c'est-à-dire dont un sommet se trouve à t = 0 sur le graphique de la position en fonction du temps. Aucune courbe ne présente un sommet à t = 0, mais analysons le graphique 5 de l'accélération en fonction du temps. Puisque $a = -\omega^2 x$, la courbe de l'accélération est inversée par rapport à celle de la position. Ainsi, quand la position est maximale et positive (un sommet), l'accélération est maximale et négative (un creux). Le graphique 5 illustre donc un mouvement pour lequel ϕ = 0 rad.

f) Graphique 1



$$\alpha = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$$

1) Puisque $\phi > 0$, on cherche un graphique où l'axe vertical est décalé vers la droite d'un cycle et demi. Après un cycle et demi d'une courbe de cosinus, la courbe passe au même endroit qu'après un seul demi-cycle et les deux valeurs de décalage seraient donc équivalentes. La courbe atteint alors un creux. Un creux doit donc maintenant coïncider avec l'axe vertical à $t = 0$, et seul le graphique 1 présente cette particularité.

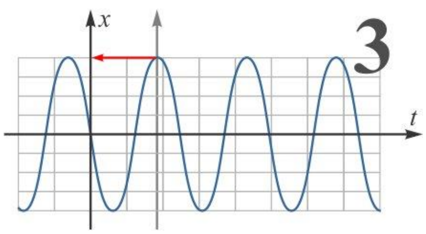
retour à la question ▲

Remarque : c'est la même réponse qu'en b). Les deux constantes de phases sont distantes de deux cycles entiers, et des courbes décalées de deux cycles entiers l'une par rapport à l'autre se confondent parfaitement.

Attention! Le graphique 5 présente aussi un creux à t = 0, mais il s'agit d'un graphique de l'accélération en fonction du temps, et celle-ci ne se comporte pas comme la position. Le graphique 5 ne représente donc pas une constante de phase de –π.

2) Validation : Sur le graphique 1, la période a une durée de 2 graduations. $^3/_2$ de cette quantité est 3 grad et le graphique 1 indiquerait bien un sommet décalé vers la droite de trois graduations si on prolongeait la courbe vers la gauche.

g) Graphique 3



$$\alpha = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{2\pi} = -\frac{3}{4}$$

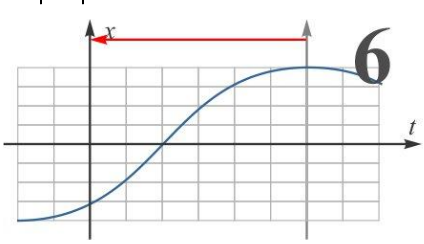
1) Puisque $\phi < 0$, on cherche un graphique où l'axe est décalé vers la gauche de trois quarts de cycle. Trois quarts de cycle à gauche d'un sommet, on trouvera un croisement d'axe en descendant, et c'est ce croisement d'axe qui se trouve maintenant vis-à-vis l'axe vertical ($t = 0$), et le graphique 3 présente cette particularité.

Remarque : c'est la même réponse qu'en a). Les deux constantes de phases sont distantes d'un cycle entier, et des courbes décalées d'un cycle entier l'une par rapport à l'autre se confondent parfaitement.

retour à la question ▲

2) Validation : Sur le graphique 3, la période a une durée de 2,5 graduations. Trois quarts de cette quantité est 1,875 grad ou $^{15}/_8$. Le graphique 3 montre bien un sommet décalé vers la droite de près de deux de graduations.

h) Graphique 6



$$\alpha = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{2\pi} = -\frac{3}{8}$$

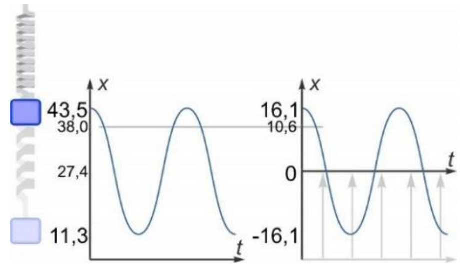
1) Puisque $\phi > 0$, on cherche un graphique où l'axe vertical est décalé vers la gauche de trois huitièmes de cycle. Un décalage de $^3/_8$ de cycle vers la gauche ferait en sorte que l'axe se déplace de trois quarts du chemin vers le creux voisin (voir figure). On cherche donc un graphique sur lequel l'axe vertical croise la courbe dans la remontée entre un creux et le croisement d'axe. Seul le graphique 6 présente cette particularité et le fait qu'on n'aperçoive pas un cycle complet n'est pas une contrainte pour répondre à la question.

2) Validation : Sur le graphique 6 on n'aperçoit pas un cycle complet, mais on compte 8 graduations d'un creux à un sommet (demi-période). La période couvre donc 16 graduations. $^3/_8$ de cette quantité représente alors 6 graduations.

retour à la question ▲

1.12 Solution : Constante de phase

retour à la question ▲



➔ Remarque importante : Les équations du mouvement harmonique sont faites pour considérer que la position centrale est égale à 0, avec un éloignement de même grandeur de chaque côté lors du mouvement. Les positions dans l'énoncé présentent un mouvement décalé et on doit faire une correction des positions avant d'utiliser les équations.

La figure ci-contre illustre le décalage de l'échelle de la position verticale, ainsi que les valeurs corrigées de l'amplitude et des valeurs liées aux questions.

a) A = 16,1 cm

L'amplitude est la distance entre la position centrale du mouvement d'oscillation et une position extrême; elle est donc la moitié de la distance entre les deux positions extrêmes, et on peut la déterminer sans faire la transposition du mouvement à x = 0 :

$$A = \tfrac{1}{2}(43{,}5\text{ cm} - 11{,}3\text{ cm}) \quad = \quad \mathbf{16{,}1\ cm}$$

b) T = 2,80 s

Le mouvement décrit est le déplacement d'une position maximale à l'autre, alors qu'un cycle complet est un aller-retour complet, incluant le retour à la position initiale. Le retour ayant la même durée que l'aller, la période est donc :

$$T = 2 \times 1{,}40\text{ s} \quad = \quad \mathbf{2{,}80\ s}$$

c) v = –27,2 cm/s

Puisque l'énoncé n'indique aucune référence de temps, on ne peut pas assigner de constante de temps ϕ au mouvement produit, ni de valeur t à l'instant où survient la vitesse recherchée. En fait, à chaque constante de phase ϕ qu'on pourrait considérer correspond un instant t pour l'instant étudié, et une infinité de combinaisons sont valides. Le plus simple est alors de résumer l'argument du sinus (équation de vitesse) par $(\omega t+\phi) = \Phi$. Ainsi, deux inconnues n'en forment plus qu'une et les calculs de la solution seront plus simples.

Ainsi, l'équation de la vitesse lors d'un mouvement d'oscillation harmonique est :

$$v = -\omega A \sin(\Phi), \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{d'où :} \qquad v = \frac{-2\pi A \sin(\Phi)}{T}$$

La phase du mouvement correspondant à la position x = 38,0 cm peut être définie à l'aide de l'équation de la position du mouvement harmonique. Mais la position 38,0 cm n'est pas définie par rapport à la position centrale du mouvement. On doit donc maintenant faire la correction pour considérer des positions dont l'origine est la position centrale. Cette position centrale est $43{,}5\text{ cm} - 16{,}1\text{ cm} = 27{,}4\text{ cm}$.

Ainsi, la position correspondant à 38 cm à utiliser dans les calculs est : $x = 38{,}0\text{ cm} - 27{,}4\text{ cm} = 10{,}6\text{ cm}$

$$x = A\cos(\Phi) \quad ➔ \quad \Phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) \quad = \quad \cos^{-1}\left(\frac{10{,}6\text{ cm}}{16{,}1\text{ cm}}\right) \quad = \quad 0{,}852\text{ rad}$$

Attention!!! L'utilisation d'une fonction trigonométrique inverse exige qu'on s'assure d'avoir la bonne solution. Dans le cas présent, le premier passage à 38,0 cm se produit dans le premier quart de période (avant le premier passage au centre). L'angle de 0,852 rad correspond au premier cadran du cercle, c'est donc la bonne valeur. Finalement :

$$v = \frac{-2\pi A \sin(\Phi)}{T} \quad = \quad \frac{-2\pi A \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)\right)}{T} \quad = \quad \frac{-2\pi \times 16{,}1\text{ cm} \times \sin(0{,}852\text{ rad})}{2{,}80\text{ s}} \quad = \quad \mathbf{-27{,}2\ \frac{cm}{s}}$$

retour à la question ▲

1.13 Solution : ΔΦ

retour à la question ▲

$\Delta\Phi$ = 3,98 rad

La proportion que représente la portion étudiée dans un cycle complet est la même que l'avance de phase par rapport à 2π. Ce lien est représenté par l'équation

$$\frac{\Delta\phi}{\pi\, rad} = \frac{\Delta t}{T} \quad ➔ \quad \Delta\phi = \frac{\Delta t}{T}\cdot(2\pi\text{ rad}) \quad = \frac{2{,}85\ s}{4{,}50\ s} \times 2\pi \quad = \quad \mathbf{3{,}98\ s}$$

retour à la question ▲

1.14 Solution : Constante de phase en ligne

retour à la question ▲

Exercices en ligne

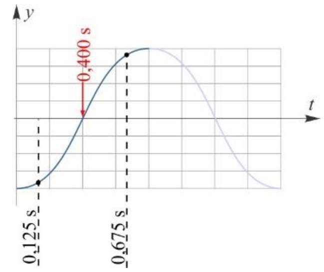
retour à la question ▲

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.15 Solution : Amplitude & Période retour à la question ▲

T = 1,60 s et A = 5,67 cm



On peut concevoir la seule courbe de position en fonction du temps pouvant correspondre aux trois points définis :

$$y_{t=0} = -A$$
$$y_{t=0{,}125\text{ s}} = -5{,}00\text{ cm}$$
$$y_{t=0{,}625\text{ s}} = 5{,}00\text{ cm}$$

On peut percevoir une certaine symétrie dans l'information fournie, puisqu'on connaît le temps pour deux positions opposées ±5,00 cm, atteintes successivement. On peut donc deviner qu'à la moitié de l'intervalle entre ces deux positions, la masse passe par l'origine (voir figure ci-contre). On peut donc déterminer le moment du premier passage à l'origine en ajoutant les premières 0,125 s écoulées :

$$t_{y=0} = 0{,}125\text{ s} + \frac{0{,}675\text{ s} - 0{,}125\text{ s}}{2} = 0{,}400\text{ s}$$

De 0 s à 0,400 s, le mouvement avance d'un quart de cycle. La période totale est donc de **1,60 s** (ou 4×0,400 s). Pour déterminer ensuite l'amplitude, on peut utiliser l'équation du mouvement harmonique, dans laquelle on insère les coordonnées d'un point connu du mouvement. Choisissons le point y = –5,00 cm à t = –0,125 s :

$$y = A\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad A = \frac{y}{\cos(\omega t + \phi)}$$

Les paramètres ω et ϕ sont également inconnus, mais peuvent être déterminés indépendamment de cette équation. La fréquence angulaire ω est liée à la période par $\omega = \frac{2\pi}{T}$, et la constante de phase se devine en constatant que la courbe est celle d'un cosinus décalé d'un demi-cycle. On a donc ϕ = π (ou ϕ = –π, qui serait équivalent). Donc :

$$A = \frac{y}{\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)} = \frac{-5{,}00\text{ cm}}{\cos\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1{,}60\text{ s}} \times 0{,}125\text{ s} + \pi\text{ rad}\right)} = \mathbf{5{,}67\ cm}$$

retour à la question ▲

1.16 Solution : $v(t)$ retour à la question ▲

$z = 1{,}27\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, Les distances étant en mètres et le temps en secondes.

L'équation de la position étant de la forme $z = A\cos(\omega t + \phi)$, les valeurs à déterminer sont A, ω et ϕ. L'amplitude du mouvement n'est pas directement donnée par le graphique. Les valeurs 4 et –4 sont les vitesses maximales et non les positions maximales (car le graphique est celui de la vitesse). Mais la vitesse maximale étant connue, l'amplitude peut être déterminée puisque selon l'équation de la vitesse, la vitesse maximale est $v_{max} = \pm\omega A$. On doit donc d'abord déterminer la fréquence angulaire, à partir de la période observable sur le graphique :

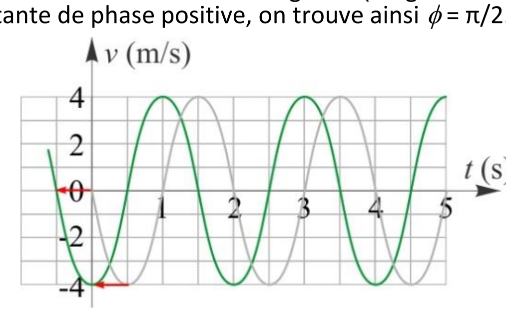
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\ s} = \pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_{max} = \omega A \quad \rightarrow \quad A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \frac{4}{\pi}\text{ m} = 1{,}27\text{ m}$$

retour à la question ▲

Il ne manque que la constante de phase qui peut être déterminée de deux manières. D'abord, puisque $v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$, la vitesse suit une courbe sinusoïdale inversée. Le fait qu'un creux coïncide avec t = 0 implique alors un décalage d'un quart de cycle vers la gauche par rapport à la courbe de sinus renversée originale (en gris sur la figure ci-bas). Un décalage de la courbe vers la gauche étant lié à une constante de phase positive, on trouve ainsi ϕ = π/2.

De façon plus méthodique on peut identifier un point de la courbe pour lequel on connait le temps et la vitesse, et résoudre l'équation de la vitesse pour la seule inconnue, ϕ. Le point v = –4 m/s à t = 0 est le plus commode puisqu'il annulera certains termes, en plus d'éviter l'ambiguïté de la solution double du sinus inverse. Donc :



$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}\left(\frac{-v}{\omega A}\right) - \omega t$$

Puisque t = 0 et que $A = \frac{v_{max}}{\omega}$, on obtient :

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{-v}{\omega\cdot\left(\frac{v_{max}}{\omega}\right)}\right) - \omega \times 0$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{-v}{v_{max}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{-\left(-4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$$

Remarque : le cas particulier « $\sin^{-1}1$ » n'a qu'une solution. On n'a donc pas à choisir entre deux résultats du calcul.

Si on réunit tous les paramètres trouvés, l'équation de la position est : $\boldsymbol{z = 1,27\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$

retour à la question ▲

1.2 LE SYSTÈME MASSE-RESSORT

1.17 Solution : Systèmes A et B

retour à la question ▲

a) $\frac{m_A}{m_B} = \frac{8}{9} = 0,\bar{8}$

La masse dans un système masse-ressort est liée à la constante de rappel du ressort et à la fréquence angulaire des oscillations par $\omega = \sqrt{k/m}$, et cette fréquence angulaire est liée à la période par $\omega = {}^{2\pi}\!/_{T}$. On peut donc développer une expression de la masse en fonction des autres paramètres du système :

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

Une expression du rapport des masses peut alors être écrite et simplifiée :

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\left(\frac{k_A T_A^2}{4\pi^2}\right)}{\left(\frac{k_B T_B^2}{4\pi^2}\right)} = \frac{k_A T_A^2}{k_B T_B^2}$$

On sait que $k_B = 2k_A$, et que $T_B = 0{,}75T_A$, donc :

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{k_A T_A^2}{k_B T_B^2} = \frac{k_A T_A^2}{(2k_A)\cdot(0{,}75T_A)^2} = \frac{1}{2\times 0{,}75^2} = \mathbf{0,\bar{8}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}}$$

b) $\frac{v_A}{v_B} = 0{,}75$

La vitesse lors du mouvement harmonique étant donnée par $v = -\omega A \sin\Phi$, le module de la vitesse maximale est donc $v = \omega A$. Le rapport ${}^{v_A}\!/_{v_B}$ est donc donnée par :

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega_A A_A}{\omega_B A_B} = \frac{\omega_A A}{\omega_B A} = \frac{\omega_A}{\omega_B},$$ les amplitudes étant identiques.

Donc : $$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T_A}\right)}{\left(\frac{2\pi}{T_B}\right)} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{0{,}75T_A}{T_A} = \mathbf{0,75}$$

retour à la question ▲

retour à la question ▲

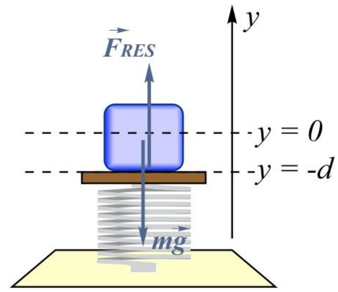
1.18 Solution : Ressort vertical retour à la question ▲

retour à la question ▲

a) v = 2,21 m/s

La vitesse atteinte par la masse avant de toucher la plate-forme ne concerne que la cinématique d'un mouvement de chute libre. En plaçant l'origine de la hauteur au niveau de la plate-forme, on a :

$$\begin{aligned} y_0 &= h = 0{,}250 \text{ m} \\ y &= 0 \\ v_0 &= 0 \\ v &= ?? \\ a &= -g \\ t &= ? \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}(-g)t^2 \\ v^2 &= \underbrace{v_0^2}_{=0} + 2(-g)\cdot\left(\underbrace{y}_{=0} - y_0\right) \end{aligned}$$



$$v = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}250 \text{ m}} = \mathbf{2{,}21 \,\tfrac{m}{s}}$$

retour à la question ▲

b) d = 6,50 cm

La position centrale du mouvement se trouve là où la masse est en équilibre (somme des forces nulle). Puisque le mouvement de la masse se déroule verticalement on cherche donc la compression du ressort qui s'opposera au poids de la masse. À l'équilibre :

$$\sum F = 0 = F_{RES} - F_g$$

$$0 = (-ky) - mg$$

la position de l'extrémité mobile du ressort étant $y = -d$ selon le choix d'origine (voir figure) :

$$0 = \big(-k(-d)\big) - mg$$

$$d = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}50 \text{ kg} \times 9{,}81 \,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{75{,}5 \,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = \mathbf{0{,}0650 \text{ m}}$$

Le ressort se comprimera de 6,50 cm.

retour à la question ▲

c) d_{max} = 25,7 cm

C'est la détermination de l'amplitude du mouvement qui nous permettra de déterminer la compression maximale (en l'ajoutant à la compression à la position d'équilibre). Par les réponses en a) et en b), on connait la vitesse due la masse à une position de 6,50 cm de la position d'équilibre. Attention : la position initiale de la plateforme n'est pas une position extrême du mouvement de la masse, car celle-ci a déjà une vitesse en ce point. Réunissons les équations de la position et de la vitesse du mouvement harmonique, dans la forme où le moment du début du cycle n'est pas important :

$$x = A\cos(\Phi) \qquad \text{et} \qquad v = -\omega A \sin(\Phi)$$

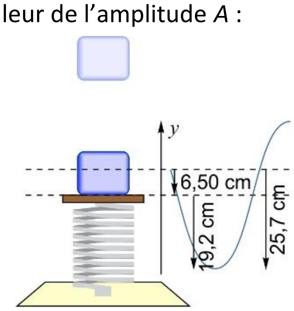
Les inconnues dans ces deux équations sont ω, A et Φ. On peut déterminer ω à partir des propriétés de ce système masse-ressort : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Une manière rapide de faire disparaître une inconnue dans les équations de x et de v est d'exprimer le rapport $^{x}/_{v}$:

$$\frac{x}{v} = \frac{A\cos\Phi}{-\omega A \sin\Phi} = \frac{\cos\Phi}{-\omega\sin\Phi} = \frac{-1}{\omega\tan\Phi}$$

On peut alors déterminer la valeur Φ (sans intérêt), qui permet ensuite de revenir trouver la valeur de l'amplitude A :

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{-v}{x}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$$



$$x = A\cos\Phi = A\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{-v}{x}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right)$$

$$A = \frac{x}{\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{-v}{x}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right)} = \frac{0{,}0650 \text{ m}}{\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{-2{,}21 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}0650 \text{ m}}\sqrt{\frac{0{,}500 \text{ kg}}{75{,}5 \,\frac{\text{N}}{\text{m}}}}\right)\right)} = 0{,}192 \text{ m}$$

L'amplitude du mouvement est de 19,2 cm (la seconde solution de l'inverse tangente aurait donné –0,192 m, donc invalide mais de même valeur). La masse comprimera donc le ressort de 19,2 cm sous la position d'équilibre, qui se trouve déjà 6,50 cm sous la position initiale de la plateforme (position initiale de l'extrémité du ressort). La figure ci-haut illustre les distances impliquées. La compression totale maximale est donc :

$$d_{max} = 19{,}2 \text{ cm} + 6{,}50 \text{ cm} = \mathbf{25{,}7 \text{ cm}}$$

retour à la question ▲

1.19 Solution : Rappel retour à la question ▲

k = 2,45 N/m

La fréquence angulaire du système masse-ressort est la grandeur liée d'une part à la période d'oscillation et d'autre part à la constante de rappel du système :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

D'où : $\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$

On détermine la période à partir des mesures faites :

$$T = \frac{12{,}7\ \text{s}}{10} = 1{,}27\ \text{s}$$

Finalement : $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 0{,}100\ \text{kg}}{(1{,}27\ \text{s})^2} = \mathbf{2{,}45\ \frac{N}{m}}$

retour à la question ▲

1.20 Solution : Vieille voiture retour à la question ▲

m_{tot} = 792 kg

La masse de l'arrière de la voiture oscille sous l'effet de deux ressorts (qui forment en réalité un ressort équivalent). On peut cependant simplifier le fait qu'il y a deux ressorts en traitant un seul côté, où chaque ressort ne porte que la moitié de la masse recherchée. Pour chaque côté, les oscillations présentent une fréquence angulaire obéissant à :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \text{d'où} \qquad m_{½} = \frac{k_{1\,res}}{\omega^2}, \qquad \text{et } m_{tot} = 2 \times \frac{k_{1\,res}}{\omega^2}$$

La fréquence angulaire peut être déterminée à partir de la période, elle-même définie par le fait qu'il y ait 4 oscillations complètes en 5,00 s :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{avec} \quad T = \frac{5{,}00\ \text{s}}{4} = 1{,}25\ \text{s}$$

D'où : $\omega = \frac{2\pi}{1{,}25\ \text{s}} = 1{,}6\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Finalement : $m_{tot} = \frac{2k}{\omega^2} = \frac{2 \times \left(10{,}0 \times 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)}{\left(1{,}6\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} = \mathbf{792\ kg}$

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.21 Solution : Deux scénarios

retour à la question ▲

$m_A = 0{,}0\overline{8}$ kg

Ignorant à la fois les valeurs des masses et la constante de rappel du ressort, on doit exprimer l'équation s'appliquant au système pour chacun des deux scénarios. Appelons A le scénario initial et B le scénario où la masse est augmentée de 50 g. Ce qui change d'un scénario à l'autre, c'est la masse ET la période (donc aussi la fréquence angulaire) :

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m_A}} \qquad \text{et} \qquad \omega_B = \sqrt{\frac{k}{m_B}}$$

Avec $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$ et $\omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$

D'où : $\frac{2\pi}{T_A} = \sqrt{\frac{k}{m_A}}$ et $\frac{2\pi}{T_B} = \sqrt{\frac{k}{m_B}}$

La constante de rappel étant la même, on peut isoler k dans chacune des équations pour les réunir :

$$\frac{4\pi^2 \cdot m_A}{T_A^2} = k = \frac{4\pi^2 \cdot m_B}{T_B^2}$$

$$\frac{m_A}{T_A^2} = \frac{m_B}{T_B^2}$$

Sachant que $m_B = (m_A + 0{,}050 \text{ kg})$ et que $T_B = 1{,}25 T_A$:

$$\frac{m_A}{T_A^2} = \frac{m_A + 0{,}050\ kg}{(1{,}25 \cdot T_A)^2}$$

$$\frac{m_A}{1} = \frac{m_A + 0{,}050\ kg}{1{,}25^2}$$

$$1{,}5625 m_A = m_A + 0{,}050 \text{ kg}$$

$$m_A = \mathbf{0{,}0\overline{8}\ kg}$$

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.22 Solution : Cinématique retour à la question ▲

retour à la question ▲

a) k = 60 N/m

La constante de rappel du ressort, lors d'une oscillation harmonique, est liée à la fréquence angulaire par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La fréquence angulaire n'étant pas donnée, réunissons d'abord les équations de la position, de la vitesse et de l'accélération pour un mouvement harmonique :

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (1)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad (2)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad (3)$$

Les équations de x et a entraînent aussi la relation $a = -\omega^2 x$, permettant de déterminer rapidement la fréquence angulaire :

$$\omega = \sqrt{\frac{-a}{x}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{-a}{x}}$$

$$k = \frac{-ma}{x} = \frac{-0{,}200\ \mathrm{kg}\times 6{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{-0{,}0200\ \mathrm{m}} = \mathbf{60{,}0\ \frac{N}{m}}$$

retour à la question ▲

b) A = 23,2 cm

Les équations 1, 2 et 3 contiennent au moins 3 inconnues, mais comme les mesures sont faites au même instant et que ω et ϕ sont des constantes, on peut remplacer l'argument entier par Φ (pour simplifier seulement la manipulation des équations). Les équations 1 et 2 prennent une forme plus simple et on peut les réunir en exprimant par exemple le rapport *x/v :*

$$\begin{array}{l} x = A\cos\Phi \\ v = -\omega A\sin\Phi \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{v} = \frac{A\cos\Phi}{-\omega A\sin\Phi} = \frac{-1}{\omega\tan\Phi}$$

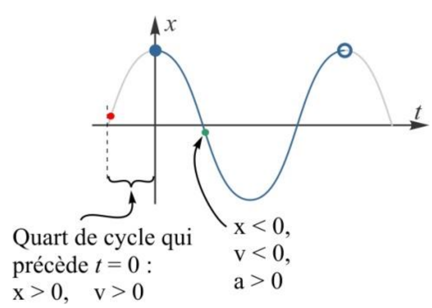
On peut alors déterminer la phase correspondant aux valeurs mesurées et revenir sur la variable A pour déterminer l'amplitude :

$$\Phi = \tan^{1}\left(\frac{-v}{\omega x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-v}{\sqrt{\frac{-a}{x}}\cdot x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\left(-4{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{\sqrt{\frac{-\left(6{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{-0{,}0200\ \mathrm{m}}}\cdot\times(-0{,}0200\ \mathrm{m})}\right) = -1{,}48\ \mathrm{rad}$$

retour à la question ▲

Attention!! La tangente inverse admet deux solutions et il faut valider si la valeur obtenue est la bonne. On s'intéresse à la phase du mouvement faisant en sorte que la position est négative (x = –2,00 cm) et que la vitesse est négative également (v = –4,00 m/s).

La phase –1,48 rad se trouve dans le quatrième cadran (entre 0 et $-\pi/2$ rad), dans le quart de cycle qui précède t = 0 (pour la courbe d'un cosinus sans décalage). Cette portion du cycle devrait présenter une position positive et une vitesse positive (voir point rouge sur la figure ci-contre), ce qui n'est pas cohérent avec les données du problème (x < 0 et v < 0); cela indique qu'on doit calculer la seconde solution de la tangente inverse. Les deux solutions d'une tangente inverse sont « Φ » et « $\Phi - 180°$ » (l'angle opposé dans un cercle, et point vert sur la figure). Donc :



$$\Phi = -1{,}48\ \mathrm{rad} + \pi\ \mathrm{rad} = 1{,}66\ \mathrm{rad}$$

Retour sur $x = A\cos\Phi$ pour déterminer l'amplitude :

$$A = \frac{x}{\cos\Phi} = \frac{-2{,}00\ \mathrm{cm}}{\cos(1{,}66\ \mathrm{rad})} = \mathbf{23{,}2\ cm}$$

Remarque : Utiliser la mauvaise valeur de phase aurait entraîné une amplitude négative mais de même grandeur, ce qui est une indication de l'erreur sur la valeur de ϕ.

c) f = 2,76 Hz

retour à la question ▲

La fréquence f se calcule directement à partir de la fréquence angulaire ω :

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{-a}{x}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{-a}{4\pi^2 x}} = \sqrt{\frac{-\left(6{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{4\pi^2 \times (-0{,}0200\ \mathrm{m})}} = \mathbf{2{,}76\ Hz}$$

d) $\phi = -0{,}0749$ rad

Avec l'équation 1, la constante de phase ϕ est maintenant la seule inconnue :

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \sqrt{\frac{-a}{x}} \cdot t$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-2{,}00\ \mathrm{cm}}{23{,}2\ \mathrm{cm}}\right) - \sqrt{\frac{-\left(6{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{-0{,}0200\ \mathrm{m}}} \times 0{,}100\ \mathrm{s} = -0{,}0749\ \mathrm{rad}$$

Puisqu'il y a deux solutions possibles à la fonction « $\cos^{-1}$ », on doit s'assurer que celle trouvée est la bonne. On peut la réutiliser pour calculer al vitesse et vérifier si on trouve bien la vitesse négative donnée de –4,00 m/s :

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$= -\sqrt{\frac{-a}{x}} \times 23{,}2\ \mathrm{cm} \times \sin\left(\sqrt{\frac{-\left(6{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{-0{,}0200\ \mathrm{m}}} \times 0{,}100\ \mathrm{s} + (-0{,}0749\ \mathrm{rad})\right) = -4{,}00\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

C'est bien la vitesse indiquée pour l'instant traité. La constante de phase $\phi = \mathbf{-0{,}0749\ rad}$ est donc la bonne valeur.

retour à la question ▲

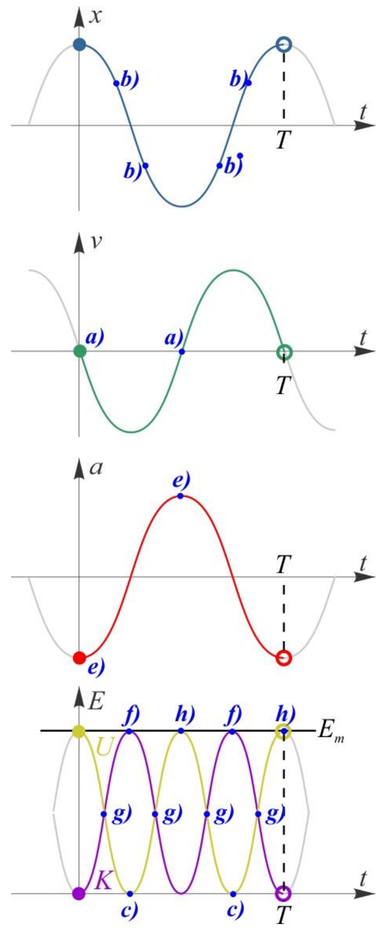
1.3 L'ÉNERGIE DANS LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE

1.23 Solution : Combien de fois

retour à la question ▲

retour à la question ▲

retour à la question ▲



Une erreur courante pour une telle question est de considérer deux fois le point à l'extrémité du cycle utilisé pour déterminer la réponse. Tel que sur la figure ci-contre, si on considère un cycle entier d'un cosinus, on ne doit compter QU'UNE SEULE FOIS le sommet de la courbe. Si l'un des sommets appartient au cycle analysé, l'autre appartient au cycle voisin et ne doit pas être compté. Peu importe où commence le cycle analysé, cette mise en garde prévaut.

a) 2 fois

Voir les croisements d'axe sur le graphique v(t). Aussi, la vitesse est nulle lorsque la masse atteint une position maximale (pente nulle de la courbe $x(t)$).

b) 4 fois

Voir graphique $x(t)$.

c) 2 fois

Voir graphique $E(t)$. L'énergie potentielle est nulle lorsque le ressort passe par sa position d'équilibre (repos), c'est-à-dire lorsque la masse passe par la position centrale du mouvement.

d) Jamais.

Voir graphique $E(t)$. L'énergie mécanique (totale) est la somme des énergies potentielle et cinétique. Celles-ci ne sont jamais nulles simultanément.

e) 2 fois

Puisqu'on parle du module, on ne se soucie pas du signe de l'accélération (le sens). L'accélération est maximale lorsque le ressort est le plus étiré ou comprimé, c'est-à-dire lorsque la masse est le plus éloignée du centre. Voir graphique $a(t)$.

f) 2 fois

Voir graphique $E(t)$. L'énergie cinétique est maximale lorsque la vitesse est maximale, lorsque la masse passe au centre de son mouvement.

g) 4 fois

Voir graphique $E(t)$.

h) 2 fois

Voir graphique $E(t)$.

retour à la question ▲

1.24 Solution : Doubler l'énergie retour à la question ▲

a) La période demeure identique.

La période dépend des propriétés constantes du système (masse et constante de rappel), et non du mouvement communiqué au système.

b) L'amplitude augmente d'un facteur $\sqrt{2}$.

L'amplitude augmente selon la relation suivante :

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2}{k}} \times \sqrt{E}$$

On constate que l'amplitude est proportionnelle à la racine de l'énergie du système $A \propto \sqrt{E}$. Si l'énergie double, l'amplitude augmentera d'un facteur $\sqrt{2}$. On peut le démontrer par :

$$A' = \sqrt{\frac{2E'}{k}} = \sqrt{\frac{2(2E)}{k}} = \sqrt{2} \times \underbrace{\left(\sqrt{\frac{2E}{k}}\right)}_{=A} = \sqrt{2} \cdot A$$

c) La vitesse maximale augmente d'un facteur $\sqrt{2}$.

La vitesse maximale (son module) est donnée par l'équation de la vitesse lorsque le sinus égale 1 :

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad |v_{max}| = \omega A$$

Puisque la fréquence angulaire (ω) est une propriété constante du système et que l'amplitude augmente d'un facteur $\sqrt{2}$, la vitesse maximale augmentera également d'un facteur $\sqrt{2}$.

retour à la question ▲

1.25 Solution : Énergie initiale retour à la question ▲

a) T = 0,307 s

La période est indépendante de l'énergie du système. Elle est liée aux propriétés du système, par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 m}{k}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times 0{,}125\ \text{kg}}{52{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = \mathbf{0{,}307\ s}$$

b) A = 0,756 m

Le lien le plus direct entre les propriétés du système masse-ressort, son énergie et l'amplitude de son mouvement est

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 15{,}0\ \text{J}}{52{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = \mathbf{0{,}756\ m}$$

retour à la question ▲

retour à la question ▲
retour à la question ▲

1.26 Solution : Énergie mécanique retour à la question ▲

a) U = 0,0749 J

L'énergie potentielle du système est celle du ressort, étiré ou comprimé si la masse n'est pas à la position centrale de son mouvement. On doit donc déterminer la position de la masse à t = 1,00 s, position obéissant à $x = A\cos(\omega t + \phi)$. L'amplitude est fournie, mais on doit encore déterminer la fréquence angulaire ω et la constante de phase ϕ. La fréquence angulaire se trouve à partir des propriétés du système :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0{,}170\ \mathrm{kg}}} = 3{,}83\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

retour à la question ▲

La constante de phase peut se calculer à partir du fait que la masse est à l'origine du mouvement à t = 0 :

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t = \cos^{-1}\left(\frac{0}{A}\right) - \sqrt{\frac{k}{m}} \times 0 = \pm\frac{\pi}{2}$$

Ce calcul admet deux solutions, mais dans le cas du calcul de l'énergie, les deux solutions entraînent les mêmes quantités puisqu'il n'y a pas de signe à l'énergie. Choisissons arbitrairement de travailler avec ϕ = +π/2. L'énergie potentielle à t = 1,00 s est donc :

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}k(A\cos(\omega t + \phi))^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2{,}50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \times (0{,}383\ \mathrm{m})^2 \times \cos^2\left(3{,}83\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \times 1{,}00\ \mathrm{s} + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right) = \mathbf{0{,}0749\ J}$$

b) K = 0,108 J

L'énergie cinétique requiert le calcul de la vitesse. En un seul calcul :

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(-\omega A\sin(\omega t + \phi))^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0{,}170\ \mathrm{kg} \times \left(3{,}83\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \times \sin^2\left(3{,}83\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \times 1{,}00\ \mathrm{s} + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right) = \mathbf{0{,}108\ J}$$

c) E = 0,183 J

L'énergie mécanique totale est la somme des énergies potentielle et cinétique, mais est aussi donnée par

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \times (0{,}383\ \mathrm{m})^2 = \mathbf{0{,}183\ J}$$

On peut confirmer que cette quantité correspond bien à la somme $E = K + U$, ce qui confirme la validité du résultat.

retour à la question ▲

1.4 LES PENDULES

1.27 Solution : Le Panthéon retour à la question ▲

T = 16,4 s

La période d'oscillation est liée à l'accélération gravitationnelle via la fréquence angulaire, dont deux définitions sont :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donc : $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{67{,}0\ \mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \mathbf{16{,}4\ s}$$

retour à la question ▲

1.28 Solution : Gravité retour à la question ▲

a) La période augmente d'un facteur 2,45 (racine carrée de 6).

La période d'oscillation est liée à l'accélération gravitationnelle via la fréquence angulaire, dont deux définitions sont :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donc : $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$$

Si on installe le pendule sur la Lune où $g_L = g/6$, on aura :

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g_L}} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{\frac{g}{6}}} = \sqrt{6} \times \underbrace{\frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}}_{=T} = \sqrt{6} \cdot T = \mathbf{2,45}\boldsymbol{T}$$

b) La période diminue d'un facteur 0,911.

À nouveau on a besoin du lien développé en a), $T = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$. L'accélération gravitationnelle affectant le pendule est en fait l'accélération gravitationnelle ressentie. Pour les mêmes raisons qu'on se sent plus lourd lorsqu'un ascenseur accélère vers le haut, l'accélération gravitationnelle ressentie est plus grande (voir le « poids apparent » dans le cours de mécanique). L'accélération gravitationnelle ressentie (disons g') est donc la somme de l'accélération gravitationnelle réelle et de l'accélération réelle de l'ascenseur :

$$g' = g + a_{asc} = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 11{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La période modifiée sera :

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g'}} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g+a_{asc}}}$$

On pourrait calculer les périodes T et T', ou procéder comme suit pour obtenir une expression simplifiée du facteur de diminution de la période :

$$\frac{T'}{T} = \frac{\left(\frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g+a_{asc}}}\right)}{\left(\frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}\right)} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g+a_{asc}}} = \sqrt{\frac{g}{g+a_{asc}}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}+2{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \mathbf{0,911}$$

c) La période augmente à l'infini ou n'existe plus (il n'y a plus d'oscillations).

Si la caisse est en chute libre, le pendule est également en chute libre, et il n'y a plus aucune tension dans la corde, donc aucune force produisant un mouvement autre que vertical sur le pendule. Il n'oscillera plus.

D'un autre point de vue, si on procède par l'analyse de l'accélération gravitationnelle ressentie par le pendule (comme en b)), on trouve une accélération g' nulle; l'accélération de la caisse vers le bas entraîne un poids apparent nul pour tout son contenu. Avec $g' = 0$, on obtient :

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g'}} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{0}} = \infty$$

d) La période augmente d'un facteur 1,41 (racine carrée de 2).

À partir du lien développé en a) entre la période et les propriétés du pendule, la modification de la longueur L entraîne :

$$\frac{T'}{T} = \frac{\left(\frac{2\pi\sqrt{L'}}{\sqrt{g}}\right)}{\left(\frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}\right)} = \frac{\left(\frac{2\pi\sqrt{2L}}{\sqrt{g}}\right)}{\left(\frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}\right)} = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{L}} = \sqrt{2} = \mathbf{1,41}$$

e) La période demeure la même.

Selon l'équation développée en a), on observe que la période ne dépend pas de la masse du pendule. La masse n'apparaît pas dans l'équation, et aucun des paramètres présents n'est altéré par le fait de modifier la masse suspendue. La période demeure donc la même.

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$$

retour à la question ▲

retour à la question ▲
retour à la question ▲
retour à la question ▲

1.29 Solution : Une seconde

retour à la question ▲

L = 24,8 cm

La période d'oscillation est liée à l'accélération gravitationnelle via la fréquence angulaire, dont deux définitions sont :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donc : $$L = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times (1{,}00\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}248\ \mathrm{m} = \mathbf{24,8\ cm}$$

retour à la question ▲

1.30 Solution : Pendule

retour à la question ▲

a) ω = 5,92 rad/s

La fréquence angulaire du pendule est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}280\ \mathrm{m}}} = \mathbf{5,92}\ \frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$$

b) *T* = 1,06 s

La période de tout mouvement harmonique est liée à la fréquence angulaire par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5{,}92\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} = \mathbf{1,06\ s}$$

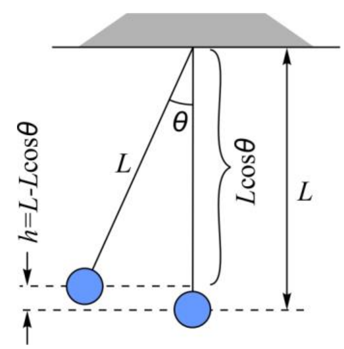
c) $\phi = 0$

La constante de phase peut se déduire rapidement à partir du fait que le mouvement débute à $\theta = +\theta_{\max}$ (à *t* = 0); cela correspond à une courbe sans décalage de cosinus, donc $\phi = 0$. Cependant, le calcul qui confirme ce fait est le suivant :

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right) - \omega t = \cos^{-1}\left(\frac{\theta_{max}}{\theta_{max}}\right) - \sqrt{\frac{k}{m}} \times 0 = \mathbf{0}$$

d) *E* = 0,00272 J

L'énergie du pendule est la somme en tout temps de son énergie potentielle gravitationnelle et de son énergie cinétique. Si on analyse le moment où le pendule est à sa position maximale, toute l'énergie du pendule est contenue dans son énergie gravitationnelle (donc *E*=*U*). On doit donc d'abord déterminer la hauteur de la masse du pendule, par rapport à son point le plus bas. Celle-ci est liée à la longueur de la corde du pendule ainsi qu'à l'angle que cette corde fait avec la verticale (voir figure ci-contre) :



$$h = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$$

L'énergie potentielle est alors :

$$E = U = mgh = mgL(1 - \cos\theta)$$

$$= 0{,}0900\ kg \times 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 0{,}280\ m \times (1 - \cos 8{,}50°) = \mathbf{0,00272\ J}$$

e) v_t = –0,246 m/s

L'équation de la vitesse du mouvement harmonique peut nous donner la vitesse au point le plus bas, mais la vitesse obtenue est une vitesse angulaire; il faudra ensuite la convertir en vitesse linéaire. Puisque la vitesse au point le plus bas est aussi la vitesse maximale, l'équation se simplifie :

$$v_\theta = -\omega\theta_{max}\sin(\omega t + \phi) = -\omega\theta_{max} = -5{,}92\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \times 8{,}50° = -50{,}3\,\frac{\mathrm{deg}}{\mathrm{s}}$$

Pour convertir la vitesse angulaire en vitesse linéaire, on doit d'abord convertir les degrés en radians :

$$v_\theta = -50{,}3\,\frac{\mathrm{deg}}{\mathrm{s}} \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{360°} = -0{,}878\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

La vitesse linéaire (tangentielle) est donc :

$$v_t = v_\theta r = v_\theta L = -0{,}878\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \times 0{,}280\ m = \mathbf{-0,246}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

f) v_t = –0,199 m/s

On reprend le traitement de la partie e), mais sans faire disparaître le terme sin(…). Il faut alors déterminer l'instant *t* où la position est de 5,00°, ce qu'on peut faire à partir de l'équation de la position angulaire :

retour à la question ▲
retour à la question ▲

retour à la question ▲

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad t = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{\theta}{A}\right) - \phi}{\omega} = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{5{,}00°}{8{,}50°}\right) - 0}{5{,}92\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0{,}159\ \text{s}$$

La vitesse angulaire à cet instant (en degrés par seconde) :

$$v_\theta = -\omega\theta_{max}\sin(\omega t + \phi) = -5{,}92\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 8{,}50° \times \sin\left(5{,}92\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0{,}159\ \text{s} - 0\right) = -40{,}7\ \tfrac{\text{deg}}{\text{s}}$$

Conversion de la vitesse angulaire en radians par seconde :

$$v_\theta = -40{,}7\ \tfrac{\text{deg}}{\text{s}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = -0{,}710\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La vitesse linéaire est donc :

$$v_t = v_\theta r = v_\theta L = -0{,}710\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0{,}280\ m = \mathbf{-0{,}199\ \tfrac{m}{s}}$$

retour à la question ▲

1.31 Solution : Question angulaire

retour à la question ▲

a) θ_{max} = 27,9°

La vitesse tangentielle est liée à la vitesse angulaire du pendule par :

$$v_t = v_\theta L.$$

Cette relation est vraie aussi pour l'instant où la vitesse est maximale :

$$v_{t\ max} = v_{\theta\ max} \cdot L. \qquad (1)$$

L'équation générale de la vitesse angulaire v_θ d'un pendule contient le paramètre de l'amplitude (amplitude angulaire θ_{max}) et peut aussi être exprimée pour le cas où la vitesse est maximale (lorsque le sinus est égal à 1) :

$$v_\theta = -\omega\theta_{max}\sin(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad v_{\theta\ max} = \omega\theta_{max}, \qquad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

d'où :

$$v_{\theta\ max} = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \theta_{max} \qquad (2)$$

L'union des équations (1) et (2) permet d'obtenir une équation où l'amplitude θ_{max} est la seule inconnue :

$$v_{t\ max} = \left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \theta_{max}\right) \cdot L = \sqrt{gL} \cdot \theta_{max}$$

$$\theta_{max} = \frac{v_{t\ max}}{\sqrt{gL}} = \frac{1{,}20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}620\ \text{m}}} = 0{,}487\ \text{rad}$$

Cette amplitude de 0,487 rad convertie en degrés est :

$$\theta_{max} = 0{,}487\ \text{rad} \times \frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} = \mathbf{27{,}9°}$$

b) t = 0,0788 s

Le mouvement décrit n'est pas situé dans le temps; aucune constante de phase n'a été définie. On peut donc la considérer nulle ou en choisir une qui simplifie l'analyse, pour établir une équation complète de ce mouvement. Voyons les deux scénarios.

• Dans le scénario où la constante de phase serait nulle, l'équation complète du mouvement est :

$$\theta = 0{,}487\ \text{rad} \times \cos(\omega t + 0) = 0{,}487\ \text{rad} \times \cos(\omega t), \qquad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

On doit alors trouver les moments des passages à θ = 0 ainsi qu'à θ = 0,15 rad, en s'assurant que ce sont deux moments les plus rapprochés de passage à ces endroits. L'expression du temps obtenue à partir de l'équation précédente de la position est :

$$t = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{\theta}{0{,}487\ \text{rad}}\right)}{\omega} = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{\theta}{0{,}487\ \text{rad}}\right)}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \times \cos^{-1}\left(\frac{\theta}{0{,}487\ \text{rad}}\right)$$

Ne pas oublier que la fonction $\cos^{-1}$ admet deux solutions. Pour θ = 0 :

retour à la question ▲
retour à la question ▲
retour à la question ▲
retour à la question ▲

$$t = \sqrt{\frac{0{,}620\ \text{m}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \times \cos^{-1}\left(\frac{0}{0{,}487\ \text{rad}}\right) = 0{,}395\ \text{s} \qquad \text{(pour } \theta = 0\text{, les deux solutions du } \cos^{-1} \text{ coïncident)}$$

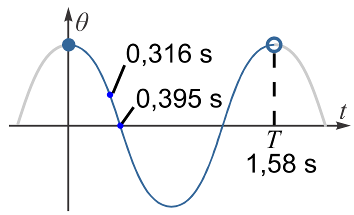
Pour θ = 0,150 rad :

$$t = \sqrt{\frac{0{,}620\ \text{m}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \times \cos^{-1}\left(\frac{0{,}150\ \text{rad}}{0{,}487\ \text{rad}}\right) = \begin{array}{l}\text{Solution 1: } +0{,}316\ \text{s} \\ \text{Solution 2: } -0{,}316\ \text{s}\end{array} \qquad \text{(l'instant 0,316 s est le plus près de 0,395 s)}$$

La période étant connaissable, on pourra tracer le graphique pour s'assurer que les deux moments trouvés sont ceux des passages consécutifs aux endroits analysés :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}620\ \text{m}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}58\ \text{s}$$

Le graphique du mouvement où on peut illustrer les deux instants trouvés est le suivant :



On y voit bien que les instants trouvés sont voisins. Le temps de passage de θ = 0 à θ = 0,150 rad est :

$$t = t_0 - t_{0{,}150\ \text{rad}} = 0{,}395\ \text{s} - 0{,}316\ \text{s} = \mathbf{0{,}0788\ s}$$

(C'est le temps de passage de 0,150 rad à 0 rad et non l'inverse, mais par symétrie, c'est équivalent au temps recherché.)

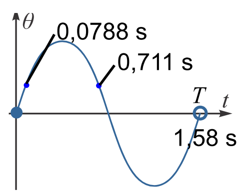
• Dans le scénario où on veut identifier une constante de phase qui simplifie les calculs, on peut faire en sorte que le mouvement commence dans la position verticale à t = 0. On peut donc choisir une constante de phase de $\pm\frac{\pi}{2}$. Le cas $-\frac{\pi}{2}$ est le plus simple car la position angulaire est en augmentation à partir de t = 0, selon le graphique présenté plus bas avec les deux moments du passage à θ = 0,150 rad.

L'équation du mouvement est alors :

$$\theta = 0{,}487\ \text{rad} \times \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \qquad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

et le moment du passage à θ = 0,150 rad est :

$$t = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{\theta}{0{,}487\ \text{rad}}\right) + \frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{0{,}150\ \text{rad}}{0{,}487\ \text{rad}}\right) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = \begin{array}{l}\text{Solution 1: } t = 0{,}711\ \text{s} \\ \text{Solution 2: } t = 0{,}0788\ \text{s}\end{array}$$



De toute évidence, le temps le plus court pour passer de θ = 0 rad à θ = 0,150 rad est **0,0788 s**.

retour à la question ▲

retour à la question ▲
retour à la question ▲
retour à la question ▲

1.32 Solution : *g* retour à la question ▲

g_{Mexico} = 9,77896 m/s²

À partir de la période et de la valeur connue de *g* à Québec, on peut déterminer la longueur du pendule. La longueur est liée à l'accélération gravitationnelle via la fréquence angulaire, dont deux définitions sont :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donc :
$$L = \frac{g_Q}{\omega_Q^2} = \frac{g_Q}{\left(\frac{2\pi}{T_Q}\right)^2} = \frac{g_Q T_Q^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}80714\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times(1{,}00000\text{ s})^2}{4\pi^2} = 0{,}248417758\text{ m}$$

À Mexico, la même longueur et la période connue entraînent une valeur différente de *g* :

$$g_M = L\omega^2 = L\left(\frac{2\pi}{T_M}\right)^2 = \frac{4\pi^2 L}{T_M^2} = \frac{4\pi^2\times 0{,}248417758\text{ m}}{(1{,}00144\text{ s})^2} = \mathbf{9{,}77896\,\frac{m}{s^2}}$$

Plus algébriquement :

$$g_M = L\times\omega^2 = \left(\frac{g_Q T_Q^2}{4\pi^2}\right)\times\left(\frac{2\pi}{T_M}\right)^2 = g_Q\times\left(\frac{T_Q}{T_M}\right)^2 = 9{,}80714\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\left(\frac{1{,}00000\text{ s}}{1{,}00144\text{ s}}\right)^2 = \mathbf{9{,}77896\,\frac{m}{s^2}}$$

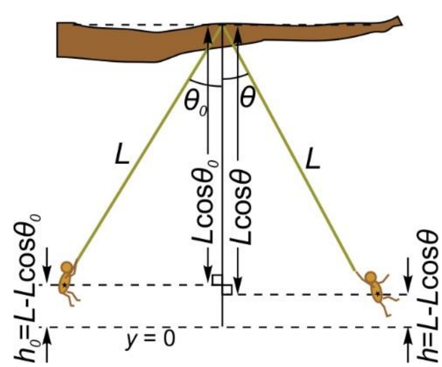
retour à la question ▲

1.33 Solution : Tarzan retour à la question ▲

θ = 35,0°

Calculons d'abord l'énergie du système avant son balancement. Étant immobile, Tarzan n'a que de l'énergie potentielle gravitationnelle. À la fin du balancement, il s'immobilise à nouveau et il n'y a encore que de l'énergie potentielle gravitationnelle.

À tout instant, la hauteur (*h*) est liée à la longueur de la corde (*L*) et l'angle de celle-ci avec la verticale (θ) par $h = L(1-\cos\theta)$ (voir figure ci-contre, où les deux hauteurs *h* et h_0 sont exprimées comme une différence de la plein hauteur *L* et d'un côté du triangle rectangle créé par l'inclinaison de la corde). Initialement :



$$E_0 = U_{g0} = mgh_0 = mg\times L(1-\cos\theta_0)$$

La même équation est valide pour l'énergie finale :

$$E = U_g = mgh = mg\times L(1-\cos\theta)$$

On sait que 234 Joules sont perdus durant le premier balancement, donc :

$$E = E_0 - 234\text{ J}$$

$$mg\times L(1-\cos\theta) = mg\times L(1-\cos\theta_0) - 234\text{ J}$$

On cherche l'angle final θ, donc :

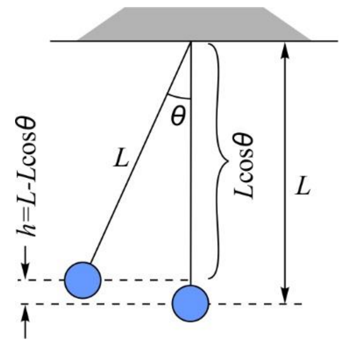
$$\theta = \cos^{-1}\left(1-\frac{mgL(1-\cos\theta_0)-234\text{ J}}{mgL}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\theta_0 - \frac{234\text{ J}}{mgL}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\cos 40{,}0° - \frac{234\text{ J}}{78{,}7\text{ kg}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 5{,}70\text{ m}}\right) = \mathbf{35{,}0°}$$

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.34 Solution : Démonstration retour à la question ▲



Écrivons d'abord la condition énoncée selon laquelle la hauteur est la moitié de la hauteur maximale :

$$h = \tfrac{1}{2} h_{max}$$

La hauteur de la masse du pendule est liée à la longueur de la corde et l'angle que fait celle-ci avec la verticale (voir figure ci-contre) :

$$h = L - L\cos\theta \quad = \quad L(1-\cos\theta)$$

Ainsi, le lien entre les deux hauteurs devient :

$$L(1-\cos\theta) = \tfrac{1}{2}\cdot L(1-\cos\theta_{max})$$

$$2(1-\cos\theta) = (1-\cos\theta_{max})$$

$$2 - 2\cos\theta = 1 - \cos\theta_{max}$$

Finalement :

$$2\cos\theta - \cos\theta_{max} = 1$$

retour à la question ▲

1.35 Solution : Pendule de lancement retour à la question ▲

d = 2,42 m

Le problème se résout en plusieurs étapes. Par conservation de l'énergie, on peut d'abord déterminer la vitesse du pendule au moment où la corde se rompt. La masse du pendule devient alors un projectile et il faut d'abord déterminer sa position à ce moment pour déterminer ensuite sa position au moment du retour au point le plus bas.

Par conservation de l'énergie, depuis la position horizontale (immobile, à θ = 90°) jusqu'à la position θ = 30° :

$$E_{30} = E_{90}$$

$$K_{30} + U_{g.30} = \underbrace{K_{90}}_{=0} + U_{g.90}$$

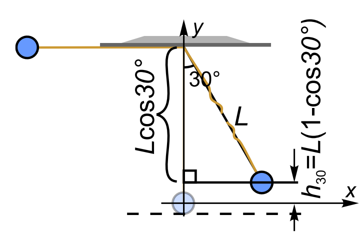
$$\tfrac{1}{2} m v_{30}^2 + m g h_{30} = 0 + m g h_{90}$$

La hauteur initiale h_{90} correspond à la longueur de la corde. La hauteur h_{30} est donnée par « L×(1–cos30°) » (voir démonstration à la solution 1.31). Donc :

$$\tfrac{1}{2} v_{30}^2 + gL(1-\cos 30°) = gL$$

$$\tfrac{1}{2} v_{30}^2 = gL - gL(1-\cos 30°) \quad = \quad gL\cos 30°$$

$$v_{30} = \sqrt{2gL\cos 30°} \quad = \quad 4{,}32\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{(Cette vitesse est plausible.)}$$



Trouvons maintenant l'emplacement de la masse du pendule à ce moment. Plaçons pour ça l'origine au point le plus bas de son mouvement; la position horizontale finale sera alors équivalente à la distance recherchée. La figure ci-contre montre les dimensions permettant de déterminer cette position. Ces coordonnées seront alors celles du début du mouvement de projectile, x_0 et y_0 :

$$x_0 = L\sin 30° \quad = \quad \tfrac{L}{2}$$

$$y_0 = L(1-\cos 30°)$$

La vitesse du pendule, tangente à la trajectoire circulaire, est orientée à 30° au-dessus de l'horizontale. Ses composantes sont donc :

$$v_{x0} = v_{30}\cos 30°$$

$$v_{y0} = v_{30}\sin 30° \quad = \quad \tfrac{1}{2} v_{30}$$

On peut alors faire la liste des paramètres cinématiques de la portion projectile du mouvement, et trouver la valeur x pour y = 0 :

retour à la question ▲
retour à la question ▲
retour à la question ▲

▲ retour à la question

▲ retour à la question

$$x_0 = \frac{L}{2} \qquad y_0 = L(1-\cos 30°)$$
$$x = ?? \qquad y = 0$$
$$v_{x0} = v_{30}\cos 30° \qquad v_{y0} = \tfrac{1}{2}v_{30}$$
$$v_x = ? \qquad v_y = ?$$
$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$
$$t = ?$$

Les équations utiles pour un projectile sont :

$$x = x_0 + v_{x0}t \quad (1) \qquad y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$
$$v_y = v_{y0} - gt \quad (3)$$

Les équations (1) et (2), appliquées à cette situation, deviennent :

$$x = \frac{L}{2} + v_{30}\cos 30° \cdot t \quad (1) \qquad 0 = L(1-\cos 30°) + \frac{v_{30}}{2}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

On peut isoler *t* dans l'équation (1) pour remplacer *t* dans l'équation (2), mais il pourrait être plus simple de trouver le temps de vol à partir de l'équation (2) seule, et ensuite trouver la position finale *x* à partir de l'équation (1). L'équation (2) est une équation du second degré, nécessitant la solution d'équation quadratique :

$$\left(-\frac{1}{2}g\right)t^2 + \left(\frac{v_{30}}{2}\right)t + L(1-\cos 30°) = 0,$$

avec :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-\left(\frac{v_{30}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{v_{30}}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}g\right)\cdot\left(L(1-\cos 30°)\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}g\right)}$$

$$t = \frac{-\left(\frac{4{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\cdot\left(1{,}10\text{ m}\times(1-\cos 30°)\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = \begin{array}{l}\text{Solution 1: } t = -0{,}0600\text{ s} \\ \text{Solution 2: } t = +0{,}501\text{ s}\end{array}$$

On retient évidemment la solution positive. Avec l'équation (1), on trouve la position *x* de la masse après ce temps dans les airs :

$$x = \frac{L}{2} + v_{30}\cos 30° \times (0{,}501\text{ s}) = \frac{1{,}10\text{ m}}{2} + 4{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30° \times (0{,}501\text{ s}) = \mathbf{2{,}42\ m}$$

retour à la question ▲

1.5 LES OSCILLATIONS AMORTIES, LES OSCILLATIONS FORCÉES ET LA RÉSONANCE

1.36 Question : Amortissement
retour à la question ▲

a) Volontairement amortis.

On désire que les oscillations de la suspension d'une voiture soient amorties pour réduire la durée du balancement (vertical).

b) Volontairement entretenu.

Le pendule d'une horloge finirait comme tout pendule par s'immobiliser après quelques minutes, ce qui nuirait au fonctionnement normal de l'horloge. Un mécanisme entretien les oscillations en injectant une petite quantité d'énergie à chaque cycle (provenant de la force gravitationnelle ou la force d'un ressort dans le mécanisme, qui demandent tous deux à être remontés périodiquement).

c) Volontairement amorti.

Le vent et les véhicules les plus lourds peuvent induire des oscillations dans la structure d'un pont suspendu (balancement du tablier). Pour empêcher ces oscillations de devenir trop grandes, la conception prévoit des mécanismes d'amortissement.

d) Volontairement entretenue.

Quand on se berce, on doit continuellement agir au sol pour que les oscillations ne cessent pas d'elles-mêmes en quelques secondes.

e) Laissées libres.

Quand on pince une corde de guitare, elle vibre et cesse petit à petit de vibrer, alors que la note entendue devient de moins en moins forte. Si on touchait à la corde pour amortir son mouvement, on l'arrêterait immédiatement.

f) Volontairement entretenues.

Pour que le mouvement de va-et-vient soit de plus en plus prononcé et finisse par déplacer la voiture hors de sa fâcheuse position, on doit injecter de l'énergie à chaque oscillation. On agit donc pour entretenir les oscillations, et même pour les amplifier.

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.37 Solution : Souffle
retour à la question ▲

Les pendules de 25 cm et de 1,00 m.

On doit d'abord déterminer la période de chacun des pendules décrits, pour identifier ceux dont la période s'apparente à la période des impulsions du souffle (ou en sont un multiple). Utilisons le lien entre longueur et période (via la fréquence angulaire) :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donc : $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$15\ \text{cm} \rightarrow T = 0{,}777\ \text{s}$
$25\ \text{cm} \rightarrow T = 1{,}00\ \text{s}$
$50\ \text{cm} \rightarrow T = 1{,}42\ \text{s}$
$1{,}00\ \text{m} \rightarrow T = 2{,}01\ \text{s}$
$2{,}00\ \text{m} \rightarrow T = 2{,}84\ \text{s}$

Le pendule dont la période est de 2,01 s (25 cm) est en résonance avec les impulsions et son amplitude atteindra une valeur constante.

Le pendule dont la période est de 1,00 s (1,00 m) sera également en résonance, car il sera poussé exactement à toutes les deux oscillations, dans la même phase de son cycle. Il oscillera de manière à être poussé par le souffle en s'éloignant de la source, une fois sur deux.

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.38 Solution : Haut-Parleur retour à la question ▲

▲ retour à la question

64,1 Hz < *f* < 78,3 Hz

Connaissant la masse du cône du haut-parleur et la constante de rappel du ressort équivalent qui produit des oscillations (30,0 N/cm = 3000 N/m), on peut calculer la fréquence angulaire propre du système :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0{,}0150\ \mathrm{kg}}} = 447\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Puisque les fréquences sonores sont des fréquences en hertz et non des fréquences angulaires en radians par seconde, faisons la conversion de la fréquence propre du système :

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}} = \sqrt{\frac{3000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{4\pi^2 \times 0{,}0150\ \mathrm{kg}}} = 71{,}2\ \mathrm{Hz}$$

Finalement, les fréquences 10 % supérieures et 10 % inférieures à cette fréquence naturelle sont :

$$f = 71{,}2\ \mathrm{Hz} \pm (0{,}10 \times 71{,}2\ \mathrm{Hz}) = \mathbf{64{,}1\ Hz < f < 78{,}3\ Hz}$$

retour à la question ▲