Équations | Sect 9.2, #1 à 11 | Sect 9.3, #12 à 20 | Sect 9.4, #21 à 33

CH 9 CINÉMATIQUE ET ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION

CONSTANTES UTILES

1 tr = 360° = 2π rad — M_{Terre} = 5,98×10^{24} kg

R_{Terre} = 6,38×10^{6} m — T_{jr} = 86 400 s

T_{an} = 3,156×10^{7} s — d_{TS} = 1,50×10^{11} m

ÉQUATIONS LIÉES AU CHAPITRE :

$\boxed{\Delta\theta = \theta - \theta_0}$ $\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$

$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$ $\boxed{v_c = v_t = \omega r}$

$\boxed{\omega = 2\pi f}$

$\boxed{\Delta s = \Delta\theta \cdot r}$ $\boxed{v_t = \omega \cdot r}$

$\boxed{a_t = \alpha \cdot r}$ $\boxed{a_r = \omega^2 \cdot r}$

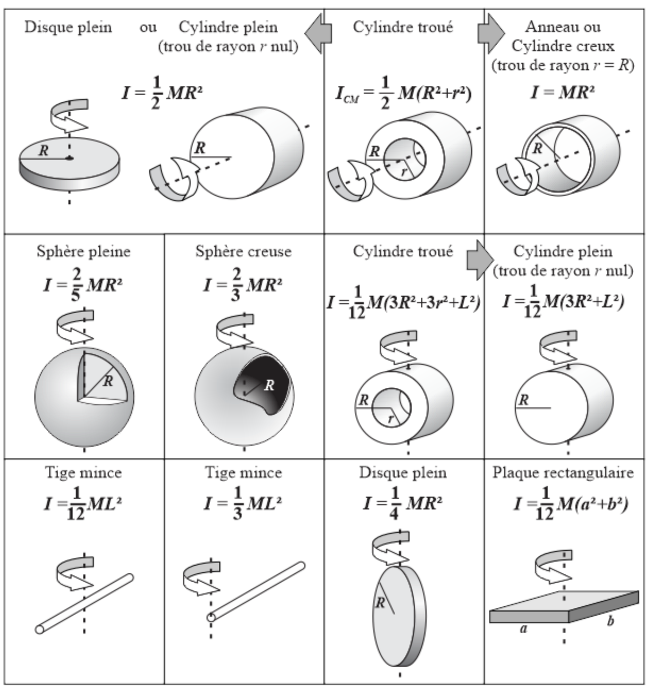
$\boxed{I = \sum m_i r_i^2}$ $\boxed{I = I_{CM} + Md^2}$

$\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I_O \omega^2}$

$\Delta\theta = \theta - \theta_0$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_A r_A = \omega_B r_B$ $\alpha_A r_A = \alpha_B r_B$

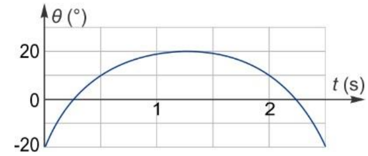
$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) t$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$



9.2 LA ROTATION À ACCÉLÉRATION ANGULAIRE CONSTANTE

9.1 Question : La parabole de la rotation — solution ►

À partir du graphique ci-contre de la position angulaire en fonction du temps, identifiez :



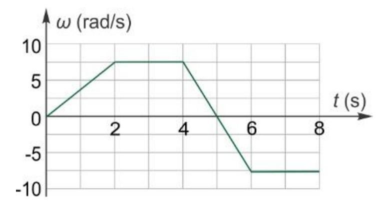
a) La position angulaire à t = 2 s;
b) Le sens de la vitesse angulaire initiale;
c) Un instant où la position angulaire est nulle;
d) Un instant où la vitesse angulaire est nulle;
e) Un instant où l'accélération angulaire est nulle;
f) Le sens de l'accélération angulaire moyenne sur l'ensemble du mouvement.

9.2 Exercice : Le tremplin — solution ►

Lors d'une performance, une gymnaste effectue un saut à l'aide d'un tremplin et effectue 3 rotations complètes alors qu'elle est dans les airs durant 2,75 secondes. Déterminez sa vitesse angulaire moyenne.

9.3 Exercice : La pièce — solution ►

Une pièce rotative dans un mécanisme présente une vitesse angulaire en fonction du temps décrite par le graphique suivant. À t = 0, une marque sur la pièce se trouve à la position angulaire de 2,50 rad.



a) Quelle est l'accélération angulaire à t = 5 s?
b) Quelle est la vitesse angulaire à t = 5 s?
c) Quelle est la position angulaire à t = 4 s?
d) Quelle est l'accélération angulaire moyenne de t = 0 s à t = 8 s?

9.4 Exercice : La roue de la fortune — solution ►

En tournant « La roue de la fortune » à la télévision, tante Gertrude la propulse à +4,50 rad/s, et la roue met 9,25 s pour s'immobiliser avec une accélération constante.

a) Quelle est l'accélération angulaire de la roue?
b) Combien de tours la roue effectue-t-elle en s'arrêtant?

9.5 Exercice : Les vieux vinyles — solution ►

Sur une table tournante servant à écouter des « vinyles », on trouve un interrupteur pour les modes 33 tr/min et 45 tr/min. Lorsqu'on passe du mode 45 tr/min au mode 33 tr/min, la surface ajuste sa vitesse en 3,70 s, selon une accélération constante.

a) Quelle est l'accélération de la table tournante durant la transition?
b) Lorsqu'on éteint le système, la table ralentit selon la même accélération jusqu'à l'arrêt complet. En combien de temps s'immobilisera-t-elle à partir de l'instant où la vitesse est de 33 tr/min?
c) Combien de tours la table effectue-t-elle durant son immobilisation?

9.6 Exercice : Le test — solution ►

Pour vérifier l'état de marche d'un moteur électrique, on le fait fonctionner à partir du repos. Il lui faut alors 2,25 s pour atteindre la vitesse angulaire de 275 rad/s. On le laisse alors tourner ainsi durant 4 secondes de plus, et on le débranche. Il s'arrête alors en 5,9 s. Combien de tours a-t-il effectué durant ce test?

9.1 - a) 10,0° — b) $v > 0$ — c) t_1 = 0,250 s, t_2 = 2,25 s — d) 1,25 s — e) Aucun — f) $a < 0$ — **9.2** - 6,85 rad/s

9.3 - a) −7,50 rad/s — b) 0 rad/s — c) 25,0 rad — d) −0,938 rad/s² — **9.4** - a) −0,486 rad/s² — b) 3,31 tr

9.5 - a) −0,340 rad/s² — b) 10,2 s — c) 2,80 tr — **9.6** - 353 tr

Codes de couleurs dans les solutions : Inconnue dont on cherche la valeur (la réponse) — Inconnue n'étant pas celle qu'on recherche — Portion provenant d'une substitution — Étape de simplification — Variables à faire disparaître par annulation — **Réponse finale à la question** — Explication préalable aux solutions ou remarque particulière

9.7 Exercice : Le caillou solution ►

Un caillou coincé entre les crampons d'un pneu de voiture effectue plusieurs rotations. Le pneu tourne à la vitesse angulaire constante de 15,0 rad/s et son rayon est de 38,5 cm. Par rapport au centre de la roue, déterminez pour ce caillou :

a) sa vitesse angulaire;
b) son accélération angulaire;
c) sa vitesse tangentielle;
d) son accélération tangentielle;
e) son accélération centripète;
f) la distance que parcourt le caillou durant 5 secondes;
g) la vitesse de l'automobile, en km/h.

9.8 Exercice : La Terre tourne solution ►

Une personne se trouvant à l'équateur parcourt une trajectoire circulaire en raison de la rotation de la Terre. Déterminez :

a) sa vitesse angulaire;
b) sa vitesse tangentielle;
c) son accélération centripète.
d) Quelle distance parcourt-elle en une journée, par rapport au centre de la Terre?

9.9 Exercice : La centrifugeuse humaine solution ►

En entraînement, les pilotes militaires doivent subir sans perdre connaissance des accélérations importantes, dans une centrifugeuse consacrée à cet entraînement. Si la capsule dans laquelle se trouve le pilote tourne sur un rayon de 6,7 mètres, déterminez la vitesse angulaire faisant en sorte qu'il subisse horizontalement 6*g*, c'est-à-dire une accélération six fois plus grande que *g*.

9.10 Exercice : La roue tourne solution ►

À quelle vitesse doit rouler un cycliste pour que ses roues, dont le rayon est de 49,5 cm tournent à 240 tr/min?

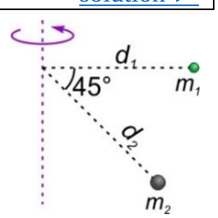
9.11 Exercice : Le vélo solution ►

À vélo, Lance Fort-des-bras pédale à la cadence de 110 rotations par minute (tours de pédalier). L'engrenage du pédalier a un rayon de 12,7 cm et celui du pignon arrière a un rayon de 3,7 cm. La roue quant à elle a un diamètre de 62,2 cm et tourne au même rythme que le pignon arrière. Quelle est la vitesse de Lance sur son vélo, en km/h?

9.3 LE MOMENT D'INERTIE

9.12 Exercice : Les masses ponctuelles solution ►

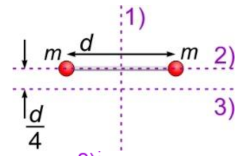
Sur la figure suivante, $m_1 = 500$ g, $m_2 = 1$ kg, $d_1 = 25$ cm et $d_2 = 30$ cm. En fonction de l'axe de rotation illustré, calculez le moment d'inertie des éléments suivants :

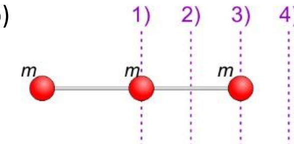


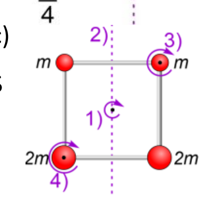
a) m_1;
b) m_2;
c) m_1 et m_2 réunies.

9.13 Question : Le meilleur et le pire solution ►

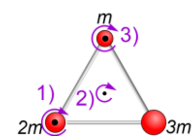
Pour chacun des systèmes de masses suivants où les tiges sont sans masse (et les masses considérées ponctuelles), déterminez l'axe selon lequel le moment d'inertie est le plus faible et celui selon lequel le moment d'inertie est le plus élevé.

a) 

b) 

c) 

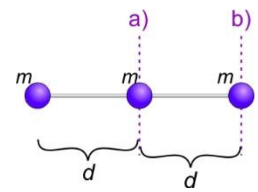
S

d) 

9.14 Exercice : Le triple haltère solution ►

Calculez le moment d'inertie de l'ensemble de masses suivant, par rapport aux différents axes illustrés.

(Les tiges sont sans masse, avec $d = 45$ cm, et les masses sont considérées ponctuelles, avec $m = 250$ g.)

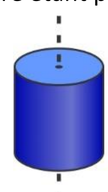


9.15 Exercice : Le triple haltère (2) solution ►

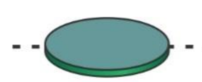
En utilisant le théorème des axes parallèles, calculez le moment d'inertie du système de masses de la question précédente, selon l'axe b), en considérant que le moment d'inertie I_{CM} est la valeur trouvée en a).

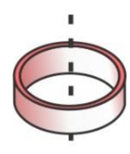
9.16 Exercice : Les solides circulaires solution ►

Quel est le moment d'inertie de chacun des objets suivants par rapport à l'axe illustré passant par leur centre, s'ils ont tous une masse de 1 kg et un rayon de 1 m (le cylindre et la sphère étant pleins)?

a) 

b) 

c) 

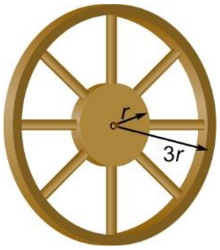
d) 

9.7 - a) 15,0 rad/s — b) $\alpha = 0$ — c) 5,78 m/s — d) $a_t = 0$ — e) 86,6 m/s² — f) 28,9 m — g) 20,8 km/$\Delta\theta$ = h —
9.8 - a) $7{,}27\times10^{-5}$ rad/s — b) 464 m/s — c) $3{,}37\times10^{-2}$ m/s² — d) 40 100 km — **9.9** - 2,96 rad/s — **9.10** - 44,8 km/h — **9.11** - 44,3 km/h —
9.12 - a) 0,031 3 kg·m² — b) 0,0450 kg·m² — c) 0,0763 kg·m² — **9.13** - a) I_{min} : 2), I_{max} : 1) — b) I_{min} : 1), I_{max} : 4) — c) I_{min} : 2), I_{max} : 3) — d) I_{min} : 2), I_{max} : 3) —
9.14 - a) 0,101 kg·m² — b) 0,253 kg·m² — **9.15** - 0,253 kg·m² — **9.16** - a) 0,500 kg·m² — b) 0,400 kg·m² — c) 0,083 3 kg·m² — d) 1,00 kg·m²

9.17 Exercice : La démo de la tige solution ▶

Le moment d'inertie d'une tige de masse M et de longueur L tournant autour de son centre sur un axe perpendiculaire à la tige est $\frac{1}{12}ML^2$. À l'aide du théorème des axes parallèles, démontrez que le moment d'inertie de la même tige lorsque l'axe (perpendiculaire) passe par une extrémité de la tige est $\frac{1}{3}ML^2$.

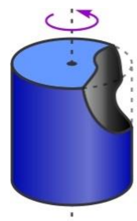
9.18 Exercice : La roue de charrette solution ▶



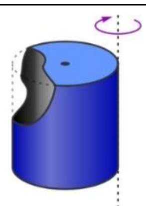
Calculez le moment d'inertie de la roue de charrette illustrée ci-contre, formée d'un disque (plein), m_d = 2,5 kg, de 8 tiges (minces), m_t = 1,5 kg, et d'un anneau (mince), m_a = 5,0 kg. Aussi, r = 30 cm.

9.19 Exercice : Le cylindre solution ▶

Un cylindre creux est formé d'une coquille mince dont la masse surfacique est ρ = 5 g/cm². Sa hauteur est de 15 cm et son rayon de 8 cm. Déterminez son moment d'inertie pour un axe longitudinal passant par le centre.



9.20 Exercice : Le cylindre II solution ▶



Si le cylindre de l'exercice précédent tourne autour d'un axe longitudinal rasant la surface extérieure, que deviendra son moment d'inertie?

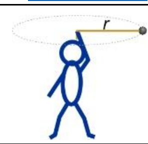
9.4 L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION ET CONSERVATION

9.21 Exercice : La roue solution ▶

Une roue ayant un moment d'inertie de 0,55 kg·m² tourne sur son axe à la vitesse angulaire de 10,7 rad/s. Déterminez son énergie cinétique de rotation.

9.22 Exercice : La fronde solution ▶

Une personne fait tourner autour de sa tête une masse de 600 g, au bout d'une corde de 80 cm. Si cette masse en rotation a une énergie cinétique de 75,0 joules, quelle est sa vitesse angulaire en tours par seconde?



9.23 Exercice : La Terre est ronde solution ▶

En considérant la Terre comme une sphère pleine :

a) calculez son énergie cinétique de rotation sur elle-même;
b) calculez son énergie cinétique de translation autour du Soleil;
c) calculez son énergie cinétique totale par rapport au Soleil.

9.24 Exercice : La meule solution ▶

Mettre en rotation à 350 rad/s une meule circulaire de 1,25 kg requiert une énergie de 490 joules.

a) Quel est le moment d'inertie de cette meule?
b) Si la meule prend la forme d'un disque plein, déterminez son rayon.

9.25 Exercice : L'énergie de l'auto solution ▶

Une automobile (M = 1 360 kg, excluant la masse des roues) se déplace à 25 m/s. Chacune des roues a une masse m de 14 kg, un rayon r de 40 cm et un moment d'inertie de 1,90 kg·m². Quelle est l'énergie cinétique totale de cette automobile?

9.26 Exercice : Bille qui roule… solution ▶

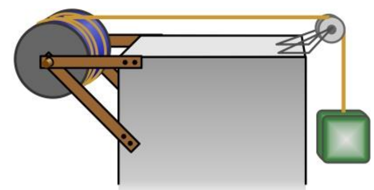
Une bille en verre (r = 0,85 cm) est déposée sur une surface inclinée de 10,0° et se met à rouler. Après que la bille ait roulé (sans glisser) sur une distance de 80 cm, déterminez :

a) la vitesse linéaire de la bille;
b) sa vitesse angulaire.

9.27 Exercice : L'élan solution ▶

Un cylindre plein roule sur une surface horizontale à la vitesse de 1,5 m/s. Il atteint un plan incliné d'une inclinaison inconnue vers le haut. À quelle hauteur se trouvera-t-il, par rapport à la surface horizontale, lorsqu'il s'immobilisera?

9.28 Exercice : Le déroulement solution ▶

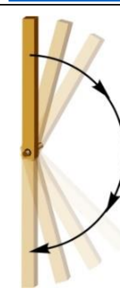


Une masse de 600 g suspendue 1,3 m au-dessus du sol est utilisée pour mettre un cylindre en rotation selon le montage ci-contre. Le cylindre (plein) a un rayon de 12,5 cm et une masse de 1,10 kg. Quelle sera la vitesse angulaire du cylindre au moment où la masse suspendue touchera le sol si elle est au repos à 1,3 m du sol?

9.29 Exercice : La tige verticale solution ▶

Une tige de 1 m peut tourner verticalement librement autour de l'une de ses extrémités. On amène cette tige dans sa position la plus haute, au-dessus de son point d'attache, et on la laisse tomber à la suite d'un léger déséquilibre. (Indice, pour la hauteur de la tige, on peut considérer celle de son centre de masse.)

a) Quelle sera sa vitesse angulaire en passant dans sa position la plus basse?
b) Quelle sera la vitesse linéaire de son extrémité libre en passant au point le plus bas?



9.17 - a) 13,2 rad/s — c) 3,96 m/s — **9.18** - 8,84 kg·m² — **9.19** - 0,030 6 kg·m² — **9.20** - 0,067 6 kg·m² — **9.21** - 31,5 J — **9.22** - 3,15 tr/s — **9.23** - a) 2,57×10²⁹ J — b) 2,67×10³³ J — c) 2,67×10³³ J — **9.24** - a) 8,00×10⁻³ kg·m² — b) 11,3 cm — **9.25** - 4,57×10⁵ J — **9.26** - a) 1,40 m/s — b) 164 rad/s — **9.27** - 0,172 m — **9.28** - 29,2 rad/s — **9.29** - a) 7,67 rad/s — b) 7,67 m/s

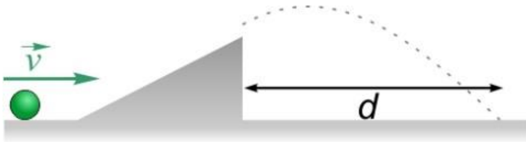
Équations Sect 9.2, #1 à 11 Sect 9.3, #12 à 20 Sect 9.4, #21 à 33

9.30 Exercice : Le chariot solution ►

Un chariot est constitué d'une plate-forme de 8 kg et de 4 roues de 2 kg chacune et d'un rayon de 15 cm (assimilées à des cylindres pleins). On donne un élan au chariot et le propulse à 4,5 m/s vers le haut d'une pente inclinée à 3,0°. Quelle distance parcourra-t-il le long de cette pente avant de s'immobiliser?

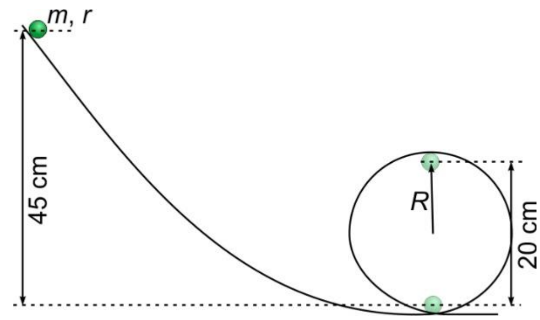
9.31 Exercice : La rampe de lancement solution ►

Une bille roule à 2,10 m/s sur une surface horizontale et rencontre une surface inclinée de 20° et qui monte d'une hauteur de 11,0 cm (voir figure qui suit). Déterminez la distance horizontale d que la bille parcourra dans les airs avant de retomber sur la surface horizontale.



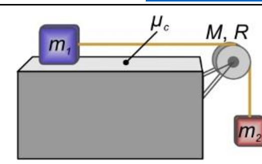
9.32 Exercice : La boucle verticale solution ►

Une bille est lâchée du haut d'une rampe inclinée menant vers une boucle circulaire verticale. La bille roule à partir d'un point 45 cm plus haut que le bas de la boucle, et le diamètre de sa trajectoire dans la boucle est de 20 cm.



a) Déterminez la vitesse de la bille en arrivant au bas de la boucle.
b) Déterminez la vitesse de la bille au sommet de la boucle.
c) Déterminez le rayon R maximal assurant que la bille demeure en contact avec la surface de la boucle.

9.33 Exercice : La poulie solution ►



Un système de deux masses et une poulie est mis en mouvement par la gravité selon le montage suivant, où m_1 = 800 g, m_2 = 600 g, M = 500 g, R = 3,5 cm.

Déterminez la vitesse des masses après s'être déplacé de 50 cm si le coefficient de frottement cinétique entre la masse m_1 et la surface horizontale est de 0,22. La poulie se comporte comme un disque plein et la corde ne glisse pas.

9.30 - 24,7 m — **9.31** - 0,350 m — **9.32** - a) 2,51 m/s — b) 1,87 m/s — c) 0,167 m — **9.33** - 1,59 m/s —

Équations Sect 9.2, #1 à 11 Sect 9.3, #12 à 20 Sect 9.4, #21 à 33

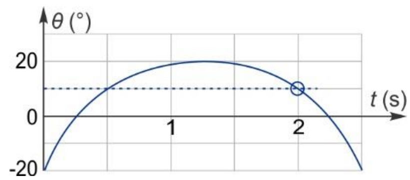
CH 9 CINÉMATIQUE ET ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION

9.2 LA ROTATION À ACCÉLÉRATION ANGULAIRE CONSTANTE

9.1 Solution : La parabole de la rotation retour à la question ▲

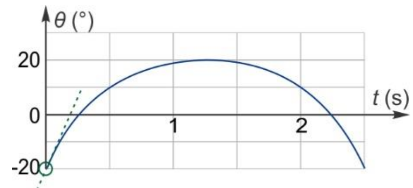
a) θ = 10°

On peut regarder l'axe vertical directement pour évaluer une valeur de la position angulaire. À t = 2 s, la courbe de la position passe par l'angle 10°.



b) v > 0

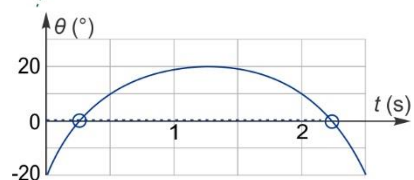
Pour évaluer la vitesse, on doit regarder la pente de la courbe $\theta(t)$. À l'instant initial (t = 0), on constate que la pente est positive; la vitesse à cet instant est donc positive.



c) t_1 = 0,250 s ou t_2 = 2,25 s

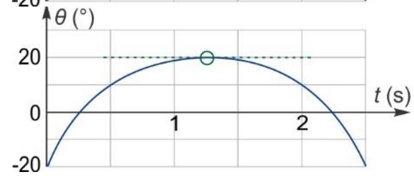
Sur un graphique $\theta(t)$, les instants où la position est nulle correspondent aux instants où la courbe croise l'axe horizontal.

Cela se produit à deux instants, soit t_1 = 0,250 s et à t_2 = 2,25 s.



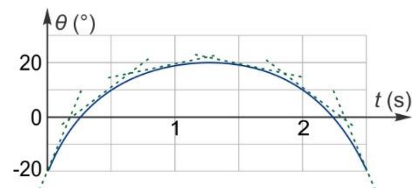
d) t = 1,25 s

Sur un graphique de la position en fonction du temps, la vitesse en un instant précis est donnée par la pente d'une tangente à la courbe à cet instant. On cherche donc un instant où la tangente est horizontale, c'est-à-dire un instant où la courbe est momentanément horizontale. Cela se produit au centre de la courbe donnée, à t = 1,25 s.



e) Aucun

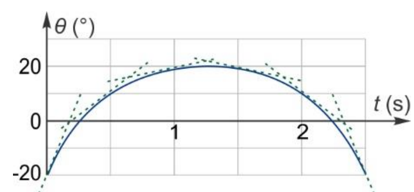
Sur la courbe de position en fonction du temps, on voit que la pente varie constamment, c'est-à-dire que la vitesse varie constamment. Il y a donc nécessairement une accélération à tout instant pour faire varier cette vitesse, et l'accélération n'est jamais nulle.



On peut faire un lien entre l'accélération angulaire et la courbure de la courbe $\theta(t)$. La présence de courbe est liée à la vitesse (pente) qui varie constamment. Puisque la courbe $\theta(t)$. ne possède aucune section linéaire, l'accélération est donc à tout instant non nulle.

f) a < 0

On peut percevoir à chaque instant une accélération angulaire négative, car la vitesse, initialement positive, devient de moins en moins positive, ensuite négative, et de plus en plus négative. Il y a donc une accélération angulaire négative en tout temps, ce qui entraine nécessairement une accélération moyenne négative.



Cependant, une manière plus simple de conclure en une accélération angulaire moyenne négative est le simple fait que la vitesse initiale est positive et que la vitesse finale est négative. Cela signifie une diminution de la vitesse en cours de mouvement. Si l'accélération angulaire avait été constante (et ainsi égale à sa valeur moyenne), elle aurait donc forcément été négative.

retour à la question ▲

9.2 Solution : Le tremplin

retour à la question ▲

$\overline{\omega} = 6{,}85\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

On traite l'ensemble du mouvement dans les airs de la gymnaste, d'une durée de 2,75 s. Durant ce mouvement de rotation, la vitesse angulaire est constante (sans appui au sol, la gymnaste ne peut modifier sa vitesse angulaire); l'accélération en rotation se produit avant de quitter le contact avec le tremplin, et elle est donc nulle durant le saut. En considérant que la rotation commence à $\theta = 0$, on rédige d'abord la liste paramètres angulaires et équations pour l'ensemble du saut :

$$\theta_0 = 0$$
$$\theta = 3\ \text{tr} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{tr}} \quad = \quad 6\pi\ \text{rad}$$
$$\omega_0 = ?$$
$$\omega = ?$$
$$\alpha = 0$$
$$t = 2{,}75\ \text{s}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2)$$

Aucune des deux équations ne suffit. Le mélange des deux, en conservant la variable *t* connue, équivaut à utiliser l'équation

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) t,$$

où le terme entre parenthèses est la vitesse angulaire moyenne. Donc : $\theta = \theta_0 + \overline{\omega} t$. En isolant la vitesse angulaire moyenne, on retrouve l'équation de la définition :

$$\overline{\omega} = \frac{\theta - \theta_0}{t} \quad = \quad \frac{6\pi\ \text{rad}\ -\ 0}{2{,}75\ \text{s}} \quad = \quad \mathbf{6{,}85}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

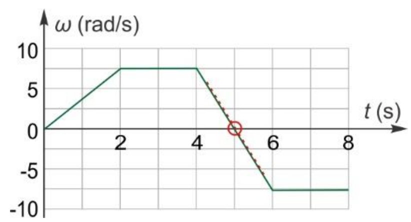
retour à la question ▲

9.3 Solution : La pièce

retour à la question ▲

a) $\alpha = -7{,}50\ \text{rad/s}^2$

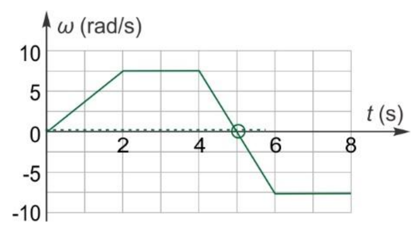
Sur un graphique de la vitesse angulaire en fonction du temps, l'accélération angulaire est donnée par la pente de la courbe à l'instant étudié. À $t = 5$ s (le point identifié sur le graphique ci-contre, on peut calculer la pente en utilisant les vitesses à $t = 4$ s et à $t = 6$ s :



$$\alpha = \frac{\omega_{6\,s} - \omega_{4\,s}}{\Delta t} \quad = \quad \frac{-7{,}5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} - \left(7{,}5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)}{6\ s\ -\ 4\ s} \quad = \quad \mathbf{-7{,}5}\ \frac{\text{rad}}{s^2}$$

b) $\omega = 0$ rad/s

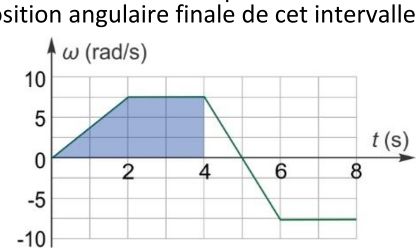
La vitesse angulaire, sur le graphique fourni, est directement donnée par la valeur sur l'axe vertical. À $t = 5$ s, la vitesse est précisément de 0 rad/s.



c) $\theta = 25{,}0$ rad

L'information de la position angulaire n'est pas directement donnée par un graphique de la vitesse angulaire en fonction du temps. Cependant, on peut évaluer un déplacement angulaire via l'aire sous la courbe pour un certain intervalle, et comme la position angulaire initiale est connue, on pourra calculer la position angulaire finale de cet intervalle :

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \qquad \rightarrow \qquad \theta = \theta_0 + \Delta\theta$$



Le déplacement $\Delta\theta$ est donnée par l'aire sous la courbe (identifiée en bleu sur le graphique ci-contre), soit l'aire d'un trapèze :

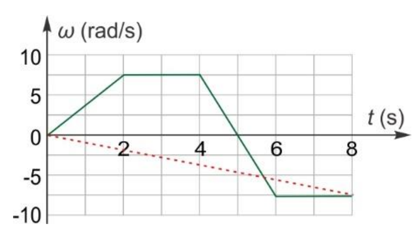
$$\Delta\theta = \frac{(B+b)h}{2} \quad = \quad \frac{(4\ \text{s}\ +\ 2\ s) \times 7{,}5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2} \quad = \quad 22{,}5\ \text{rad}$$

La position à $t = 4$ s est donc :

$$\theta = 2{,}50\ \text{rad} + 22{,}5\ \text{rad} \quad = \quad \mathbf{25{,}0\ rad}$$

d) $\alpha = -0{,}938\ \text{rad/s}^2$

Selon la définition de l'accélération angulaire moyenne :



$$\overline{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} \quad = \quad \frac{-7{,}5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\ -\ 0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{8\ s} \quad = \quad -0{,}9375\ \frac{\text{rad}}{s^2}$$

retour à la question ▲

Équations Sect 9.2, #1 à 11 Sect 9.3, #12 à 20 Sect 9.4, #21 à 33

9.4 Solution : La roue de la fortune retour à la question ▲

a) $\alpha = -0{,}486$ rad/s²

Les paramètres et équations du mouvement de la roue, durant son ralentissement jusqu'à l'arrêt, sont :

$\theta_0 = 0$
$\theta = ?$
$\omega_0 = 4{,}50\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\omega = 0$
$\alpha = ?$
$t = 9{,}25$ s

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2)$$

L'équation (2) a comme seule inconnue l'accélération que l'on cherche :

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 4{,}50\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{9{,}25\ \text{s}} = \mathbf{-0{,}486}\ \frac{\textbf{rad}}{\textbf{s}}$$

b) $\Delta\theta = 3{,}31$ rad

Selon les mêmes paramètres qu'en a), et avec l'équation (1), on a :

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 4{,}50\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 9{,}25\ \text{s} + \frac{1}{2} \times \left(-0{,}486\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \times (9{,}25\ \text{s})^2 = 20{,}8\ \text{rad}$$

Convertie en tours, cette rotation est :

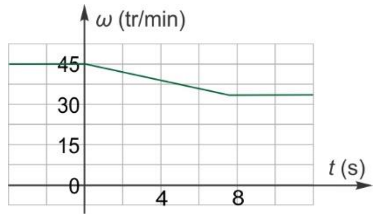
$$\theta = 20{,}8\ \text{rad} \times \frac{1\ \text{tr}}{2\pi\ \text{rad}} = \mathbf{3{,}31\ tr}$$

retour à la question ▲

9.5 Solution : Les vieux vinyles retour à la question ▲

a) $\alpha = -0{,}340$ rad/s²

Pour ce mouvement de ralentissement, on fait la liste des paramètres et équations en convertissant les unités d'angles en radians :



$\theta_0 = 0$

$\theta = ?$

$\omega_0 = 45\,\frac{\text{tr}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ tr}} \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 1{,}5\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\omega = 33\,\frac{\text{tr}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ tr}} \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 1{,}1\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\alpha = ??$

$t = 3{,}70$ s

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

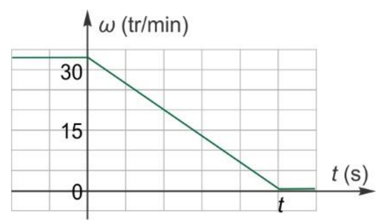
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2)$$

L'équation (2) suffit pour calculer l'accélération :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{1{,}1\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} - 1{,}5\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{3{,}70\text{ s}} = \mathbf{-0{,}340\,\frac{rad}{s^2}}$$

b) $t = 10{,}2$ s

Si on laisse ralentir la table tournante de 33 tr/min jusqu'à l'arrêt, les paramètres et équations sont :



$\theta_0 = 0$

$\theta = ?$

$\omega_0 = 1{,}1\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\omega = 0$

$\alpha = -0{,}340\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

$t = 3{,}70$ s

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2)$$

L'équation (2) comporte le temps comme seule inconnue :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 1{,}1\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{-0{,}340\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} = \mathbf{10{,}2\ s}$$

c) $\Delta\theta = 2{,}80$ tr

Selon les mêmes paramètres et équations qu'en b), l'équation (1) permet d'obtenir le déplacement angulaire en radians lors de l'arrêt. Selon l'équation (1) :

$$\theta = \underbrace{\theta_0}_{=0} + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 1{,}1\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 10{,}2\text{ s} + \frac{1}{2} \times \left(-0{,}340\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \times (10{,}2\text{ s})^2 = 17{,}6\text{ rad}$$

Convertie en tours, cette rotation est :

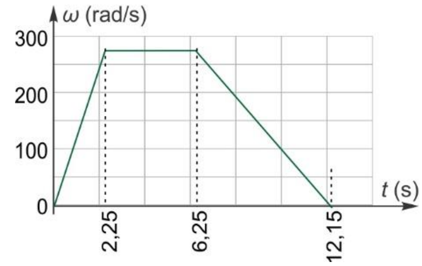
$$\theta = 17{,}6\text{ rad} \times \frac{1\text{ tr}}{2\pi\text{ rad}} = \mathbf{2{,}80\ tr}$$

retour à la question ▲

9.6 Solution : Le test retour à la question ▲

$\Delta\theta$ = 353 tr

Le mouvement se déroule en 3 phases, que l'on peut distinguer sur le graphique ci-contre. Deux approches sont efficaces pour déterminer le déplacement angulaire total, soit la méthode analytique habituelle (paramètres et équations) ainsi que la méthode de l'aire sous la courbe (voir plus loin).



Selon la méthode analytique, pour la première phase :

$\theta_0 = 0$
$\theta_1 = ??$
$\omega_0 = 0$
$\omega_1 = 275\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\alpha = ?$
$t_{0-1} = 2{,}25\ \text{s}$

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t_{0-1} + \tfrac{1}{2}\alpha t_{0-1}^2 \qquad (1)$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t_{0-1} \qquad (2)$$

Les deux équations étant requise et l'accélération inconnue, leur mélange permet d'obtenir une nouvelle équation :

$$\theta_1 = \theta_0 + \left(\frac{\omega_0+\omega_1}{2}\right) t_{0-1} \qquad (3)$$

$$\theta_1 = 0 + \left(\frac{0\ +\ 275\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2}\right) \times 2{,}25\ \text{s} \quad = \quad 309\ \text{rad}$$

À partir de cette position, la deuxième phase se fait à vitesse constante, durant 4 s. Les paramètres et équations sont :

$\theta_1 = 309\ \text{rad}$
$\theta_2 = ??$
$\omega_1 = 275\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\omega_2 = 275\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\alpha = 0$
$t_{1-2} = 4\ \text{s}$

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t_{1-2} + \tfrac{1}{2}\overbrace{\alpha}^{=0} t_{1-2}^2 \qquad (4)$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \underbrace{\alpha}_{=0} t_{1-2} \qquad (5)$$

L'équation (4) permet de trouver la nouvelle position θ_2 :

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t_{1-2} + \frac{1}{2}\underbrace{\alpha}_{=0} t_{1-2}^2 \quad = \quad 309\ \text{rad} \ + \ 275\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 4\ \text{s} \ + \ 0 \quad = \quad 1\,409\ \text{rad}$$

Finalement, pour la dernière phase, les paramètres et les équations sont :

$\theta_2 = 1\,409\ \text{rad}$
$\theta_3 = ??$
$\omega_2 = 275\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\omega_3 = 0$
$\alpha = ?$
$t_{2-3} = 5{,}9\ \text{s}$

$$\theta_3 = \theta_2 + \omega_2 t_{2-3} + \tfrac{1}{2}\alpha t_{2-3}^2 \qquad (6)$$

$$\omega_3 = \omega_2 + \alpha t_{2-3} \qquad (7)$$

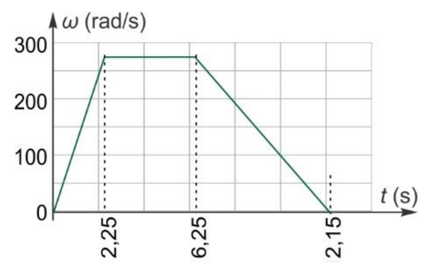
À nouveau, les deux équations sont requises et l'équation (3) mentionnée plus haut (adaptée pour la 3^{e} phase) est encore le résultat de l'union des deux équations (6) et (7) :

$$\theta_3 = \theta_2 + \left(\frac{\omega_2+\omega_3}{2}\right) t_{2-3} \quad = \quad 1\,409\ \text{rad} + \left(\frac{275\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\ +\ 0}{2}\right) \times 5{,}9\ \text{s} \quad = \quad 2\,221\ \text{rad}$$

Cette position finale est aussi le déplacement angulaire puisqu'on a considéré que le début du mouvement avait lieu à θ = 0. On convertit cette rotation en tours :

$$\theta_3 = 2\,221\ \text{rad} \times \frac{1\ \text{tr}}{2\pi\ \text{rad}} \quad = \quad \mathbf{353\ tr}$$

Alternativement, par le calcul de l'air sous la courbe, on peut obtenir plus rapidement le résultat en un seul calcul. On pourra convertir les unités de rotation en tours à même le calcul principal. Puisque l'aire sous la courbe représente un trapèze :



$$\Delta\theta = \text{Aire}_{\text{trapèze}} = \frac{(B+b)h}{2} \quad = \quad \frac{(12{,}15\ \text{s}+4\ \text{s})\times 275\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2} \times \frac{1\ \text{tr}}{2\pi\ \text{rad}} \quad = \quad \mathbf{353\ tr}$$

C'est terriblement plus court‼!

retour à la question ▲

9.7 Solution : Le caillou retour à la question ▲

a) ω = 15,0 rad/s

La vitesse angulaire d'un corps rigide en rotation est la même pour tous ses points. Les crampons d'un pneu, donc le caillou également, ont la même vitesse angulaire que le pneu lui-même, donc une vitesse angulaire de 15,0 rad/s.

b) α = 0

L'accélération angulaire est liée à la variation de la vitesse angulaire. Puisqu'on mentionne que la vitesse angulaire est constante, on doit comprendre automatiquement que l'accélération angulaire est nulle.

c) v_t = 5,78 m/s

À partir de la vitesse angulaire, la vitesse tangentielle d'un point à une distance *r* connue du centre est :

$$v_t = \omega r \quad = \quad 15{,}0\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0{,}385\text{ m} \quad = \quad \mathbf{5{,}78\,\tfrac{m}{s}}$$

d) a_t = 0

L'accélération tangentielle d'un point est liée à l'accélération angulaire et au rayon de rotation de ce point :

$$a_t = \alpha r \quad = \quad 0\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}^2} \times 0{,}385\text{ m} \quad = \quad \mathbf{0}$$

e) a_r = 86,6 m/s²

L'accélération centripète d'un point dépend de la vitesse angulaire et du rayon de rotation :

$$a_r = \omega^2 r \quad = \quad \left(15{,}0\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times 0{,}385\text{ m} \quad = \quad \mathbf{86{,}6\,\tfrac{m}{s^2}}$$

f) Δs = 28,9 m

La distance parcourue par un point tournant sur un cercle de rayon *r* est donnée par :

$$\Delta s = \Delta\theta \cdot r \quad = \quad \Big(\theta - \underbrace{\theta_0}_{=0}\Big) \cdot r \quad = \quad \theta r$$

On doit donc calculer le déplacement angulaire effectué en 5 s à la vitesse indiquée. Les paramètres et équations, alors que la vitesse est constante, sont :

$\theta_0 = 0$
$\theta = ??$
$\omega_0 = 15{,}0\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\omega = 15{,}0\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\alpha = 0$
$t = 5\text{ s}$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2)$$

L'équation (1) suffit :

$$\theta = 0 + \omega_0 t + 0 \quad = \quad 15{,}0\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 5\,s \quad = \quad 75\text{ rad}$$

Le déplacement linéaire Δs est donc :

$$\Delta s = \theta r \quad = \quad 75\text{ rad} \times 0{,}385\text{ m} \quad = \quad \mathbf{28{,}9\text{ m}}$$

g) v = 20,8 km/h

Puisque la vitesse de l'automobile est la même que celle du centre des roues et que celles-ci roulent sans glisser, on peut trouver la vitesse de translation des roues pour connaître celle de l'auto. Le module de la vitesse de translation des roues par rapport au sol est la même que celle du sol par rapport au centre des roues, c'est-à-dire la même que celle d'un point du pourtour des roues par rapport au centre, celle-ci étant donnée par :

$$v_c = v_t = \omega R \quad = \quad 15{,}0\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0{,}385\text{ m} \quad = \quad 5{,}775\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad = \quad \mathbf{20{,}8\,\tfrac{km}{h}}$$

retour à la question ▲

9.8 Solution : La Terre tourne retour à la question ▲

a) ω = 7,27×10^{-5} rad/s

Durant une journée entière, un point de la Terre effectue un tour complet, c'est-à-dire 2π radians. On peut calculer la vitesse angulaire à partir de la définition même de vitesse :

$$\omega = \overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{86\,400\ \mathrm{s}} = \mathbf{7{,}27 \times 10^{-5}\ \frac{rad}{s}}$$

b) v_t = 464 m/s

La vitesse tangentielle peut se trouver à l'aide du rayon et de la vitesse angulaire :

$$v_t = \omega r = \left(7{,}27 \times 10^{-5}\ \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) \times (6{,}38 \times 10^{6}\ \mathrm{m}) = \mathbf{464\ \tfrac{m}{s}}$$

c) a_r = 3,37×10^{-2} m/s²

L'accélération centripète se trouve également à l'aide du rayon et de la vitesse angulaire :

$$a_r = \omega^2 r = \left(7{,}27 \times 10^{-5}\ \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \times (6{,}38 \times 10^{6}\ \mathrm{m}) = \mathbf{3{,}37 \times 10^{-2}\ \tfrac{m}{s^2}}$$

d) d = 40 100 km

La distance parcourue par une personne à l'équateur en une journée est la simple circonférence de la Terre. Mais cette distance coïncide aussi avec la distance parcourue pendant 86 400 s à la vitesse tangentielle trouvée en b). Les deux approchent résultent nécessairement dans le même calcul :

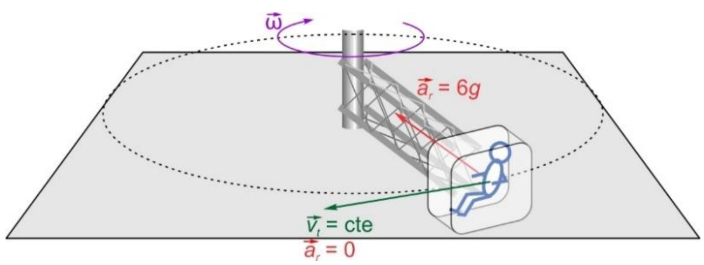
$$\Delta s = v_t \cdot \Delta t = \omega r \cdot \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r \cdot \Delta t = \Delta\theta \cdot r = 2\pi \cdot r$$

$$\Delta s = 2\pi \times (6{,}38 \times 10^{6}\ \mathrm{m}) = 4{,}01 \times 10^{7}\ \mathrm{m} = \mathbf{40\,100\ km}$$

retour à la question ▲

9.9 Solution : La centrifugeuse humaine retour à la question ▲

ω = 2,96 rad/s



Une accélération de 6g, horizontalement, alors que le passager tourne dans un plan horizontal, indique que c'est l'accélération centripète qui équivaut directement à 6g :

$a_r = 6g$

Cette accélération est liée au rayon (que l'on connait et à la vitesse angulaire que l'on cherche :

$$a_r = \omega^2 r \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \sqrt{\frac{6g}{r}} = \sqrt{\frac{6\times 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{6{,}7\ \mathrm{m}}} = \mathbf{2{,}96\ \frac{rad}{s}}$$

retour à la question ▲

9.10 Solution : La roue tourne retour à la question ▲

v = 44,8 km/h

La vitesse de translation de la roue (la même que celle du vélo) et sa vitesse de rotation sont liées par :

$$v_c = v_t = \omega R$$

On doit manipuler la vitesse angulaire en radians par secondes, ce qui exige une conversion :

$$v_c = \left(240\ \frac{\mathrm{tr}}{\mathrm{min}} \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{\mathrm{tr}} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}}\right) \times 0{,}495\ \mathrm{m} = 12{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Convertie en kilomètres par heure, cette vitesse est :

$$v = 12{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times \frac{3{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \mathbf{44{,}8\ \frac{km}{h}}$$

retour à la question ▲

9.11 Solution : Le vélo retour à la question ▲

v = 44,3 km/h

La cadence d'un cycliste est la manière courante de quantifier son rythme de rotation. On devra la convertir en rad/s pour utiliser plus facilement les équations de la transmission de la rotation. Si on appelle A l'engrenage du pédalier :

$$\omega_A = \frac{110 \text{ tr}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60\ s} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{tr}} = 11{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Cette rotation, celle des jambes du cycliste est donc aussi celle de la roue dentée du pédalier, dont le rayon est de 12,7 cm. Cette rotation est transmise par la chaine à la roue dentée du pignon arrière (engrenage B), dont la vitesse tangentielle du pourtour est la même. La vitesse angulaire des deux roues est liée par :

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B$$

$$\omega_B = \frac{\omega_A r_A}{r_B} = \frac{11{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 12{,}7 \text{ cm}}{3{,}7 \text{ cm}} = 39{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La vitesse angulaire du pignon arrière est la même que celle de la roue arrière. Les deux sont fixés l'un à l'autre, et c'est ce qui permet au vélo d'avancer. La roue arrière a donc la même vitesse angulaire, et sa vitesse de translation est liée à la vitesse tangentielle du pourtour de la roue par rapport au centre :

$$v_c = v_t = \omega_B r_{roue} = 39{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0{,}311 \text{ m} = 12{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Convertie en kilomètres par heure, cette vitesse est :

$$v = 12{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \mathbf{44{,}3}\ \frac{\textbf{km}}{\boldsymbol{h}}$$

retour à la question ▲

9.3 LE MOMENT D'INERTIE

9.12 Solution : Les masses ponctuelles retour à la question ▲

a) *I* = 0,0313 kg·m²

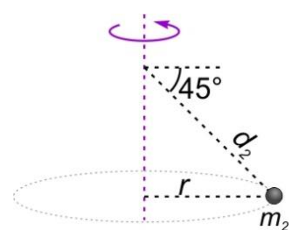
Le moment d'inertie d'une masse ponctuelle est donné par :

$$I = mr^2$$

La masse m_1 se trouve à une distance perpendiculaire d_1 de 25 cm de l'axe de rotation indiqué, donc :

$$I = m_1 d_1^2 = 0{,}500 \text{ kg} \times (0{,}25 \text{ m})^2 = \mathbf{0{,}0313\ kg \cdot m^2}$$

b) *I* = 0,0450 kg·m²



On doit considérer la distance perpendiculaire entre la masse m_2 et l'axe de rotation. La distance d_2 n'est donc pas directement la distance à considérer; on doit plutôt l'utiliser pour évaluer la distance perpendiculaire (*r* sur la figure ci-contre) :

$$r = d_2 \cos 45°$$

Le moment d'inertie de m_2, par rapport à l'axe indiqué, est donc :

$$I = m_2 r^2 = m_2 (d_2 \cos 45°)^2 = 1 \text{ kg} \times (0{,}30 \text{ m} \times \cos 45°)^2 = \mathbf{0{,}0450\ kg \cdot m^2}$$

c) I_{tot} = 0,763 kg·m²

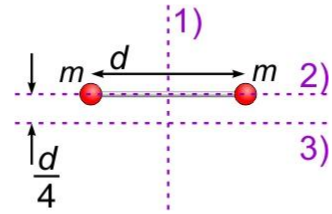
Le moment d'inertie total d'un ensemble de masses ponctuelles est donné par la somme des moments d'inertie individuels, donc pour l'ensemble de deux masses :

$$I_{tot} = \sum I = I_1 + I_2 = 0{,}031\,3\ kg \cdot m^2 + 0{,}045\,0\ kg \cdot m^2 = \mathbf{0{,}076\,3\ kg \cdot m^2}$$

retour à la question ▲

9.13 Solution : Le meilleur et le pire retour à la question ▲

a) I_{min} : 2), I_{max} : 1)



L'axe #3 étant parallèle à l'axe #2 mais ne passant pas par le C.M., le moment d'inertie selon cet axe est nécessairement supérieur $I_3 > I_2$.

Deux des axes suggérés passent par le centre de masse, #1 et #2, mais n'ont pas la même orientation. Le moment d'inertie n'est donc pas le même selon ces deux axes. L'un de ces deux axes est celui pour lequel le moment d'inertie est minimal.

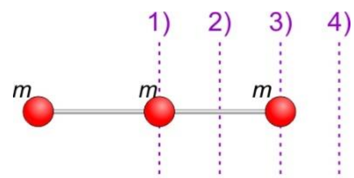
L'axe #2 passe directement sur les masses : pour ces deux masses, la distance à l'axe de rotation est donc nulle et le moment d'inertie est donc nul selon cet axe. Pour l'axe #1, le moment d'inertie est nécessairement supérieur à zéro, donc $I_1 > I_2$ et l'axe #2 est celui qui offre le moment d'inertie minimal.

$$I_{min} : 2)$$

Il nous reste à choisir entre les axes #1 et #3 pour le moment d'inertie maximal. Selon l'axe #1, les deux masses se trouvent à une distance de l'axe de $d/2$, alors que dans le cas de l'axe 3), chaque masse se trouve à un distance $d/4$ de l'axe. L'axe #1 implique donc un moment d'inertie supérieur pour chacune des masses, ce qui implique alors un moment d'inertie total supérieur.

$$I_{max} : 1)$$

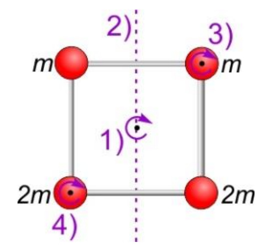
b) I_{min} : 1), I_{max} : 4)



Les axes suggérés ont tous la même orientation, donc l'axe (parmi eux) pour lequel le moment d'inertie est le plus petit passe est celui (s'il y en a un) passant par le centre de masse. L'axe #1 passe visiblement par le centre du montage, c'est donc l'axe pour lequel le moment d'inertie est minimal.

À l'opposé, pour des axes ayant tous la même orientation, le moment d'inertie le plus élevé apparaît pour l'axe le plus éloigné du centre de masse, donc l'axe #4.

c) I_{min} : 2), I_{max} : 3)



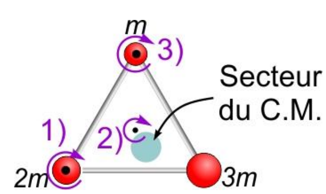
Pour identifier l'axe pour lequel le moment d'inertie est minimal, on doit faire attention à l'orientation des axes suggérés. L'axe #2 est parallèle au plan de l'illustration, alors que les axes #1, #3 et #4 sont perpendiculaires à l'illustration (et au plan du carré).

Parmi les trois axes ayant la même orientation, le moment d'inertie le plus faible se trouve pour l'axe passant le plus près du centre de masse. Vu la symétrie du montage, le centre de masse se trouvera sur l'axe de symétrie (vertical) du carré, et légèrement sous le centre puisque les masses du bas sont plus élevées. On peut donc écarter rapidement l'axe #3 (donc $I_3 > I_1$ et $I_3 > I_4$). Aussi, en étant sur l'axe de symétrie mais au-dessus des masses $2m$, le centre de masse est nécessairement plus près de l'axe #1 que de l'axe #4, et $I_4 > I_1$.

On doit finalement déterminer lequel des axes #1 et #2 offre le plus faible moment d'inertie. L'axe #2 passe par le centre de masse mais ça ne suffit pas pour le comparer à un axe ayant une autre orientation. Si on compare pour chaque masse sa distance perpendiculaire aux axes #1 et #2, on constate que toutes les masses ont une distance plus grande à l'axe #1 qu'à l'axe #2. Le moment d'inertie de chacune est donc supérieur par rapport à l'axe #1 que par rapport à l'axe #2, donc $I_1 > I_2$.

d) I_{min} : 2), I_{max} : 3)

Les trois axes indiqués ont la même orientation. La distance entre le centre de masse et chaque axe indiquera la valeur du moment d'inertie et permettra de comparer les axes entre eux.



Si les trois masses étaient identiques, le centre de masse serait au centre du triangle, là où se trouve l'axe #2. Les masses n'étant pas identiques, le C.M. sera plus bas que le centre (car les masses du bas sont plus lourdes) et à droite du centre (car la masse de droite est plus lourde).

C'est donc l'axe #2 qui est le plus proche du centre de masse, c'est celui pour lequel le moment d'inertie sera le plus faible. À l'inverse, l'axe #3 est le plus éloignée du centre de masse, c'est donc l'axe pour lequel le moment d'inertie est le plus élevé.

retour à la question ▲

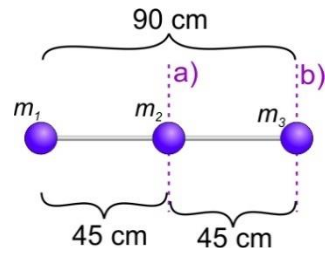
9.14 Solution : Le triple haltère retour à la question ▲

a) I = 0,101 kg·m²

Le moment d'inertie, pour un ensemble de masses ponctuelles est la somme des moments d'inertie individuels :

$$I_{tot} = \sum I \quad = \quad I_1 + I_2 + I_3, \qquad \text{avec} \qquad I = mr^2$$

On doit alors considérer la distance entre chaque masse et l'axe de rotation. En numérotant les masses selon la figure ci-contre :



$$I_{tot} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$

$$I_{tot} = 0{,}25\ \text{kg} \times (0{,}45\ \text{m})^2 + 0{,}25\ \text{kg} \times (0\ \text{m})^2 + 0{,}25\ \text{kg} \times (0{,}45\ \text{m})^2 \quad = \quad \mathbf{0{,}101\ kg \cdot m^2}$$

b) I = 0,253 kg·m²

Par rapport au calcul de la question a), seules les distances de chaque masse changent. Avec les nouvelles distances :

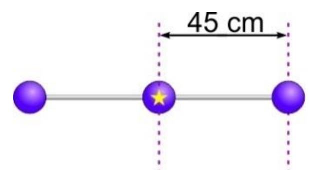
$$I_{tot} = 0{,}25\ \text{kg} \times (0{,}90\ \text{m})^2 + 0{,}25\ \text{kg} \times (0{,}45\ \text{m})^2 + 0{,}25\ \text{kg} \times (0\ \text{m})^2 \quad = \quad \mathbf{0{,}253\ kg \cdot m^2}$$

retour à la question ▲

9.15 Solution : Le triple haltère (2) retour à la question ▲

I = 0,253 kg·m²

Selon le théorème des axes parallèles :



$$I = I_{CM} + Md^2$$

La masse totale M est la somme des trois masses du montage (M = 3m) et la distance d entre l'axe donnant I_{CM} et l'axe à considérer est 45 cm. Avec I_{CM} = 0,101 kg·m² (trouvé en a)) :

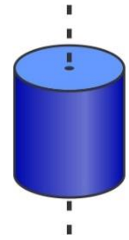
$$I = 0{,}101\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \ + \ (3 \times 0{,}25\ \text{kg}) \times (0{,}45\ \text{m})^2 \quad = \quad \mathbf{0{,}253\ kg \cdot m^2}$$

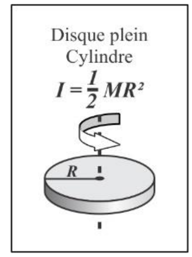
retour à la question ▲

9.16 Solution : Les solides circulaires retour à la question ▲

a) 0,500 kg·m²

Un cylindre plein est équivalent à un disque plein lorsque l'axe est perpendiculaire aux bases du cylindre (et passe par le centre). Le moment d'inertie est alors donné par :



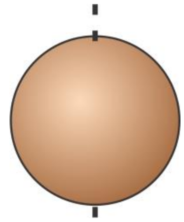


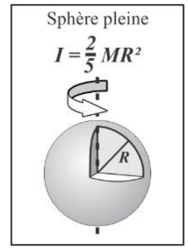
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I = \frac{1}{2} \times 1\ \text{kg} \times (1\ \text{m})^2 \quad = \quad \mathbf{0,500\ kg \cdot m^2}$$

b) 0,400 kg·m²

La sphère étant pleine, son moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre est :



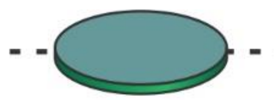


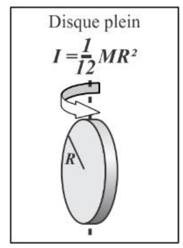
$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

$$I = \frac{2}{5} \times 1\ \text{kg} \times (1\ \text{m})^2 \quad = \quad \mathbf{0,400\ kg \cdot m^2}$$

c) 0,083 3 kg·m²

Il s'agit d'un disque plein et mince tournant autour de son centre mais sur un axe parallèle au plan du disque. Le moment d'inertie pour une telle configuration est :



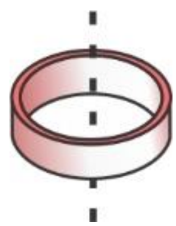


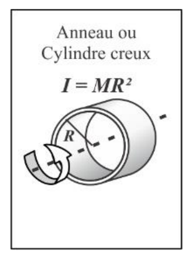
$$I = \frac{1}{12} MR^2$$

$$I = \frac{1}{12} \times 1\ \text{kg} \times (1\ \text{m})^2 \quad = \quad \mathbf{0,083\ 8\ kg \cdot m^2}$$

d) 1,00 kg·m²

Un anneau ou cylindre creux (sans bases) a un moment d'inertie donné par :





$$I = MR^2$$

C'est la même expression que pour une masse ponctuelle, puisque comme pour la masse ponctuelle, la masse est entièrement située à une distance R de l'axe; donc :

$$I = 1\ \text{kg} \times (1\ \text{m})^2 \quad = \quad \mathbf{1,00\ kg \cdot m^2}$$

retour à la question ▲

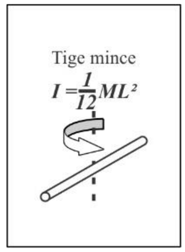
9.17 Solution : La démo de la tige retour à la question ▲

Le théorème des axes parallèles stipule que

$$I = I_{CM} + Md^2 \qquad (1)$$

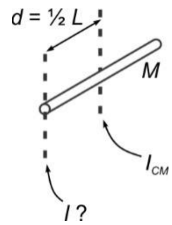
Le moment d'inertie par rapport au centre de masse, pour un axe perpendiculaire, est donné dans l'énoncé :

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 \qquad (2)$$



On doit donc identifier la distance *d* qui figure dans l'équation du théorème des axes parallèles. Il s'agit de la demi-longueur de la tige, soit la distance entre l'axe pour lequel $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$, et l'axe passant par l'extrémité de la tige; donc la distance entre le centre de la tige et une extrémité :

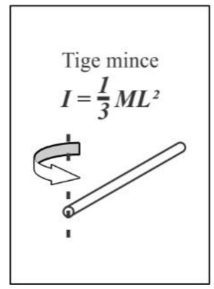
$$d = \frac{1}{2}L$$



Si on insère cette expression de *d* et l'expression (2) dans l'équation (1) :

$$I = I_{CM} + Md^2 \quad = \quad \frac{1}{12}ML^2 \; + \; M \times \left(\frac{1}{2}L\right)^2 \quad = \quad \frac{1}{12}ML^2 \; + \; \frac{1}{4}ML^2$$

$$I = \frac{4}{12}ML^2 \quad = \quad \frac{1}{3}ML^2$$



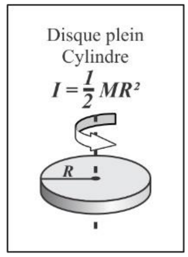
C'est bien l'expression du moment d'inertie lorsque l'axe passe par une extrémité de la tige (tel qu'indiquée au tableau des moments d'inertie, voir figure ci-contre).

retour à la question ▲

9.18 Solution : La roue de charrette retour à la question ▲

I = 8,84 kg·m²

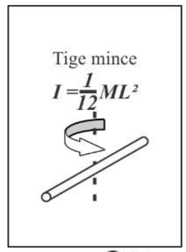
Le moment d'inertie total est donné par la somme des moments d'inertie des pièces individuelles. La roue est formée d'un disque plein (le disque central), de 8 tiges minces (les rayons de la roue), et d'un anneau mince (anneau extérieur). Le disque central et l'anneau extérieur tournent autour de leur centre, alors que les tiges tournent autour d'un axe ne passant pas par leur centre et impliqueront le théorème des axes parallèles.



Pour le disque central, le moment d'inertie est :

$$I_d = \frac{1}{2} m_d r^2$$

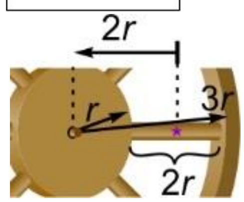
Pour chacune des tiges, le moment d'inertie, modifié par le théorème des axes parallèles, est :



$$I_t = I_{t\ CM} + m_t d^2, \quad \text{avec} \quad I_{t\ CM} = \frac{1}{12} m_t L_t^2$$

On doit alors déterminer la longueur des tiges à partir des dimensions fournies, et déterminer la distance d entre l'axe réel de rotation et le centre d'une tige.

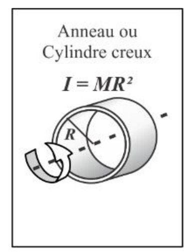
La figure ci-contre permet de constater que la longueur d'une tige est donnée par la différence entre le rayon de l'anneau et le rayon du disque central :



$$L_t = 3r - r \quad = \quad 2r$$

La distance d requise pour appliquer le théorème des axes parallèles, également selon la figure ci-contre, vient du fait que l'axe de rotation réel se trouve à $d = 2r$ du centre de masse d'une tige.

Le moment d'inertie réel d'une tige, par rapport à l'axe de rotation de la roue entière, est donc :



$$I_t = I_{t\ CM} + m_t d^2 \quad = \quad \frac{1}{12} m_t (2r)^2 + m_t (2r)^2 \quad = \quad \frac{1}{12} m_t 4r^2 + m_t 4r^2 \quad = \quad \frac{13}{3} m_t r^2$$

Pour l'anneau extérieur, considéré mince, le moment d'inertie est :

$$I_a = MR^2 \quad = \quad m_a (3r)^2 \quad = \quad 9 m_a r^2$$

Finalement, pour l'ensemble de la roue, qui comprend 8 tiges, le moment d'inertie total est :

$$I = I_d + 8 I_t + I_a \quad = \quad \frac{1}{2} m_d r^2 \; + \; 8 \times \frac{13}{3} m_t r^2 \; + \; 9 m_a r^2 \quad = \quad = \left(\frac{1}{2} m_d + \frac{104}{3} m_t + 9 m_a\right) r^2$$

$$I = \left(\frac{1}{2} \times 2{,}5\ kg \; + \; \frac{104}{3} \times 1{,}5\ kg \; + \; 9 \times 5\ kg\right) \times (0{,}3\ m)^2 \quad = \quad \mathbf{8{,}84\ kg \cdot m^2}$$

retour à la question ▲

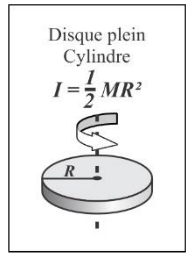
9.19 Solution : Le cylindre retour à la question ▲

I = 0,030 6 kg·m²

Le cylindre creux est formé de 3 parties, soit deux bases identiques ayant la forme de disques pleins tournant autour de leur centre sur un axe perpendiculaire, ainsi que la portion cylindrique elle-même, tournant aussi autour d'un axe passant par le centre. Le moment d'inertie de l'ensemble est la somme des moments d'inertie des trois parties, deux étant identiques. On pourrait donc écrire :

$$I = 2I_{disque} + I_{cylindre}$$

Pour chacun des disques, le moment d'inertie (pour une axe perpendiculaire passant par le centre) est donné par :



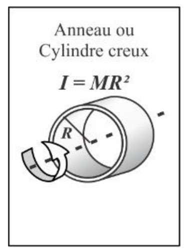
$$I_{disque} = \frac{1}{2}m_{disque}r^2$$

La masse du disque doit alors être évaluée à partir de la masse surfacique ρ et de la surface A_{disque} :

$$m_{disque} = \rho A_{disque} \quad = \quad \rho \times \pi r^2$$

Donc, pour chacun des disques :

$$I_{disque} = \frac{1}{2}(\rho \pi r^2)r^2 \quad = \quad \frac{\rho \pi r^4}{2}$$



Pour le contour cylindrique tournant autour d'un axe longitudinal passant par le centre :

$$I_{cylindre} = m_{cylindre}r^2$$

La masse du cylindre doit être évaluée à partir de la masse surfacique ρ et de la surface $A_{cylindre}$:

$$m_{cylindre} = \rho A_{cylindre} \quad = \quad \rho \times 2\pi r h$$

Donc :

$$I_{cylindre} = (\rho \times 2\pi r h)r^2 \quad = \quad 2\rho \pi r^3 h$$

On peut alors procéder au calcul du moment d'inertie total à partir de la somme des moments d'inertie des trois composantes :

$$I = 2I_{disque} + I_{cylindre} \quad = \quad 2 \times \left(\frac{\rho \pi r^4}{2}\right) \quad + \quad (2\rho \pi r^3 h) \quad = \quad \rho \pi r^3(r + 2h)$$

La masse surfacique devra être convertie en kg/m³ pour le calcul avec les autres valeurs :

$$\rho = 5\ \frac{g}{\text{cm}^2} \times \frac{1\ kg}{1\ 000\ g} \times \left(\frac{1\ m}{100\ \text{cm}}\right)^2 \quad = \quad 50\ \frac{kg}{m^2}$$

$$I = 50\ \frac{kg}{m^2} \times \pi \times (0{,}08\ m)^3 \times (0{,}08\ m + 2 \times 0{,}15\ m) \quad = \quad \mathbf{0{,}030\ 6\ kg \cdot m^2}$$

retour à la question ▲

9.20 Solution : Le cylindre II retour à la question ▲

I = 0,067 6 kg·m²

L'axe de rotation indiqué est parallèle à l'axe considéré en 10.17, celui-là passant par le centre de masse. On pourra donc utiliser le théorème des axes parallèles pour connaître le nouveau moment d'inertie à l'aide d'un seul calcul :

$$I = I_{CM} + md^2, \qquad \text{avec} \qquad I_{CM} = \rho\pi r^3(r + 2h)$$

Le déplacement de l'axe par rapport à celui qui passait par le centre de masse, d, équivaut au rayon du cylindre, 0,08 m. La masse totale du cylindre exige cependant un calcul préalable, à partir des équations établies en 10.17. On avait établi que la masse de chaque base (des disques) est :

$$m_{disque} = \rho A_{disque} \quad = \quad \rho \times \pi r^2$$

et que la masse du cylindre est :

$$m_{cylindre} = \rho A_{cylindre} \quad = \quad \rho \times 2\pi r h$$

Donc la masse totale est :

$$m = 2m_{disque} + m_{cylindre} = 2\rho\pi r^2 + 2\rho\pi r h \quad = \quad 2\rho\pi r(r + h)$$

Le moment d'inertie total modifié est donc :

$$I = I_{CM} + md^2 \quad = \quad \rho\pi r^3(r + 2h) \quad = \quad \big(2\rho\pi r(r + h)\big) \times r^2$$

$$= \rho\pi r^3(r + 2h) \quad = \quad \rho\pi r^3(2r + 2h)$$

$$= \rho\pi r^3(3r + 4h)$$

$$I = 5050\,\frac{kg}{m^2} \times \pi \times (0{,}08\,m)^3 \times (3 \times 0{,}08\,m \;+\; 4 \times 0{,}15\,m) \quad = \quad \mathbf{0{,}067\,6\,kg \cdot m^2}$$

retour à la question ▲

9.4 L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION ET CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

9.21 Solution : La roue retour à la question ▲

K = 31,5 J

L'énergie cinétique de rotation est donnée par :

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Les valeurs requises étant données, l'énergie cinétique sera :

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \times 0{,}55\ \mathrm{kg \cdot m^2} \times \left(10{,}7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \quad = \quad \mathbf{31{,}5\ J}$$

retour à la question ▲

9.22 Solution : La fronde retour à la question ▲

f = 3,15 tr/s

La masse, petite comparativement à son rayon de rotation, peut alors être considérée comme une masse ponctuelle pour l'évaluation de son moment d'inertie :

$$I = mr^2$$

L'énergie cinétique de rotation, en considérant ce moment d'inertie, est :

$$K_{rot} = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 \quad = \quad \frac{mr^2\omega^2}{2}$$

Si on isole la vitesse angulaire ω, on trouve :

$$\omega = \sqrt{\frac{2K_{rot}}{mr^2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{2 \times 75{,}0\ \mathrm{J}}{0{,}600\ \mathrm{kg} \times (0{,}80\ \mathrm{m})^2}} \quad = \quad 19{,}7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Convertissons cette vitesse angulaire en tours par seconde (fréquence f) :

$$\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{19{,}7\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi} = \mathbf{3{,}15\,\frac{tr}{s}}$$

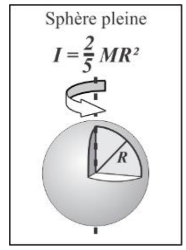
retour à la question ▲

9.23 Solution : La Terre est ronde retour à la question ▲

a) K_{rot} = 2,57×10^{29} J

L'énergie cinétique de rotation pour toute masse en rotation est donnée par :

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$$



Évidemment, sa rotation sur elle-même se fait autour de son centre de masse. On aura donc besoin de son moment d'inertie par rapport à son centre de masse (l'équation conventionnelle donnée par le tableau des moments d'inertie). Si on considère la Terre comme une sphère pleine, son moment d'inertie est :

$$I = \frac{2}{5} M_T R_T^2$$

Par ailleurs, la vitesse angulaire doit être exprimée à partir de la durée de la journée (T_{jr} = 86 400 s) pour un déplacement angulaire d'un tour (2π rad) :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi \text{ rad}}{T_{jr}}$$

L'énergie cinétique de rotation est donc :

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M_T R_T^2\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{T_{jr}}\right)^2 = \frac{4M_T}{5}\left(\frac{\pi R_T}{T_{jr}}\right)^2 = \frac{4\times(5{,}98\times10^{24}\text{ kg})}{5} \times \left(\frac{\pi\times(6{,}38\times10^6\text{ m})}{86\,400\text{ s}}\right)^2 = \mathbf{2{,}57\times10^{29}\ J}$$

b) K_{trans} = 2,67×10^{33} J

On peut voir la rotation de la terre autour du Soleil de deux manières, soit une rotation autour du Soleil ou une translation de la Terre sur une trajectoire circulaire. Dans les deux cas, on obtiendra la même expression algébrique après simplifications.

Selon le scénario de la translation, l'énergie cinétique de translation de la Terre autour du Soleil implique la durée d'une année, soit T_{an} = 3,156×10^7 s, et la circonférence de l'orbite terrestre, dont le rayon est d_{TS} = 1,50×10^{11} m. Son équation est :

$$K_{trans} = \frac{1}{2} M_T v_{orb}^2,$$

avec une vitesse orbitale donnée par :

$$v_{orb} = \frac{2\pi d_{TS}}{T_{an}}.$$

Donc :

$$K_{trans} = \frac{1}{2} M_T \left(\frac{2\pi d_{TS}}{T_{an}}\right)^2 = 2M_T\left(\frac{\pi d_{TS}}{T_{an}}\right)^2$$

$$K_{trans} = 2 \times (5{,}98\times10^{24}\text{ kg}) \times \left(\frac{\pi\times(1{,}50\times10^{11}\text{ m})}{3{,}156\times10^7\text{ s}}\right)^2 = \mathbf{2{,}666\,49\times10^{33}\ J}$$

Rem. : La précision inhabituelle de ce résultat aura une utilité en c).

c) K_{tot} = 2,67×10^{33} J

L'énergie cinétique totale de la Terre, par rapport au Soleil, est la somme de son énergie cinétique de rotation calculée en a) et de son énergie cinétique de translation calculée en b) :

$$K_{tot} = K_{rot} + K_{trans} = (2{,}57\times10^{29}\text{ J}) + (2{,}666\,49\times10^{33}\text{ J}) = \mathbf{2{,}666\,74\times10^{33}\ J}$$

On constate que l'énergie cinétique de translation est beaucoup plus grande que l'énergie cinétique de rotation. Ainsi, l'énergie cinétique totale se résume pratiquement à la valeur de son énergie cinétique de translation.

retour à la question ▲

9.24 Solution : La meule retour à la question ▲

a) I = 8,00×10^{-3} kg·m²

On peut comprendre que la quantité d'énergie indiquée est celle de l'énergie cinétique de rotation quand la meule tourne à 350 rad/s, car elle part du report et on peut assumer que toute l'énergie est investie dans l'accélération de la meule.

Le moment d'inertie est lié à l'énergie cinétique de rotation par :

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

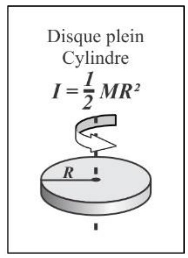
Puisqu'on nous donne la quantité d'énergie accumulée par la meule ainsi que sa vitesse angulaire, il suffit d'isoler le moment d'inertie I :

$$I = \frac{2K_{rot}}{\omega^2} \quad = \quad \frac{2\times 490\ \mathrm{J}}{\left(350\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2} \quad = \quad \mathbf{8,00\times 10^{-3}\ kg\cdot m^2}$$

b) R = 11,3 cm

Pour un disque plein qui tourne autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan, le moment d'inertie est directement lié à la masse et au rayon par l'équation :

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



Dans cette équation, l'inconnue est le rayon du disque, donc :

$$R = \sqrt{\frac{2I}{M}} \quad = \quad \sqrt{\frac{2\times(8,00\times 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2})}{1,25\ \mathrm{kg}}} \quad = \quad \mathbf{0,113\ m}$$

retour à la question ▲

9.25 Solution : L'énergie de l'auto retour à la question ▲

K_{tot} = 4,57×10^5 J

L'énergie cinétique totale de l'automobile est la somme de son énergie cinétique de translation et de son énergie cinétique de rotation.

L'énergie cinétique de translation implique la masse totale qui se déplace, c'est-à-dire la masse de l'automobile incluant ses roues. Puisque la masse de 1 360 kg n'inclut pas les roues, on doit y ajouter la masse des quatre roues pour le calcul de K_{trans} :

$$K_{trans} = \frac{1}{2}M_{tot}v^2 \quad = \quad \frac{1}{2}(M+4m)v^2$$

L'énergie cinétique de rotation est celle des quatre roues, qui tournent en plus de se déplacer :

$$K_{rot} = 4K_{rot-roue} \quad = \quad 4\times\left(\frac{1}{2}I_{roue}\omega^2\right) \quad = \quad 2I_{roue}\omega^2$$

La vitesse angulaire, pour des roues qui roulent sans glisser, est liée à la vitesse de translation et au rayon des roues par :

$$v = \omega r \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{v}{r}$$

L'énergie cinétique de rotation peut donc s'exprimer par :

$$K_{rot} = 2I_{roue}\left(\frac{v}{r}\right)^2 \quad = \quad \frac{2I_{roue}}{r^2}v^2$$

L'énergie cinétique totale est donc :

$$K_{tot} = \frac{1}{2}(M+4m)v^2 + \frac{2I_{roue}}{r^2}v^2 \quad = \quad \left(\frac{M+4m}{2} + \frac{2I_{roue}}{r^2}\right)v^2$$

$$K_{tot} = \left(\frac{1\,360\ \mathrm{kg} + 4\times 14\ \mathrm{kg}}{2} + \frac{2\times 1,90\ \mathrm{kg\cdot m^2}}{(0,40\ \mathrm{m})^2}\right)\times\left(25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \quad = \quad \mathbf{4,57\times 10^5\ J}$$

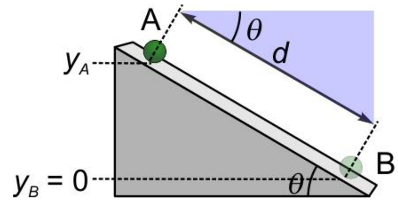
retour à la question ▲

9.26 Solution : Bille qui roule… retour à la question ▲

a) v = 1,40 m/s

Appelons A et B les positions initiale et finale de la bille sur son parcours de 80 cm le long du plan incliné. Par le traitement de l'énergie, on peut affirmer que l'énergie mécanique sera constante durant la descente de la bille car il n'y a pas de frottement cinétique (elle roule sans glisser), et aucune autre force non conservative. On peut donc écrire :

$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$



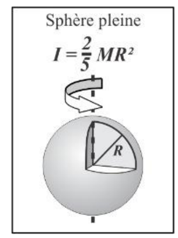
On peut décomposer l'énergie mécanique en énergie cinétique de translation, énergie cinétique de rotation et énergie potentielle gravitationnelle :

$$K_{trans\ B} + K_{rot\ B} + \underbrace{U_{gB}}_{=0} = \underbrace{K_{trans\ A}}_{=0} + \underbrace{K_{rot\ A}}_{=0} + U_{gA}$$

La bille étant déposée immobile en A, l'énergie cinétique initiale K_A est nulle (translation ET rotation). Et si on pose que la référence de hauteur est au point le plus bas du parcours, l'énergie potentielle gravitationnelle finale U_{gB} est nulle. Développons les termes qui restant :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 = mgy_A$$

Puisque la vitesse de translation équivaut à celle du centre de la bille, le moment d'inertie doit être exprimé pour un axe passant par le centre de la bille (pleine) :



$$I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$$

Puisque la bille roule sans glisser, sa vitesse de translation v_B est liée à sa vitesse angulaire ω_B. Aussi, pour trouver la vitesse linéaire d'abord, c'est ω_B qu'on exprimera en fonction de v_B :

$$v_B = \omega_B R \quad \rightarrow \quad \omega_B = \frac{v_B}{R} \qquad (1)$$

Finalement, on peut exprimer la hauteur initiale y_A en fonction de la distance parcourue et de l'inclinaison de la surface :

$$y_A = d \sin\theta$$

L'équation principale devient :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right) \times \left(\frac{v_B}{R}\right)^2 = mgd\sin\theta$$

On peut simplifier de manière à faire disparaître m et R :

$$\frac{1}{2}v_B^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}v_B^2 = gd\sin\theta$$

$$\frac{7}{10}v_B^2 = gd\sin\theta$$

$$v_B = \sqrt{\frac{10}{7}gd\sin\theta}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{10}{7} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}80\ \text{m} \times \sin 10{,}0°} = \mathbf{1{,}40\,\frac{m}{s}}$$

b) ω = 164 rad/s

La vitesse linéaire étant maintenant connue, on peut calculer la vitesse angulaire à partir de l'équation (1) utilisée en a) :

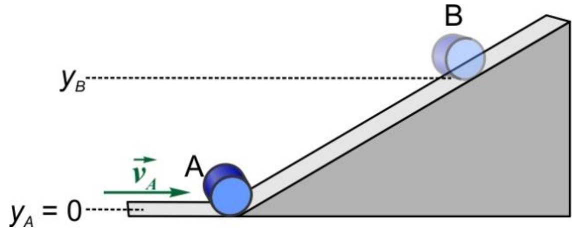
$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{1{,}40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}0085\ \text{m}} = \mathbf{164\,\frac{rad}{s}}$$

retour à la question ▲

9.27 Solution : L'élan retour à la question ▲

y = 0,172 m

Si on place la référence de hauteur au niveau de la surface horizontale, l'énergie mécanique initiale se résume à l'énergie cinétique, translation et rotation combinées. Celle-ci se transformera graduellement en énergie potentielle gravitationnelle, à mesure que le cylindre gagne de la hauteur. À la fin du mouvement, il n'a plus aucune énergie cinétique mais seulement de l'énergie potentielle gravitationnelle. Puisqu'il n'y a pas de frottement cinétique, il n'y a aucune perte d'énergie mécanique. Si on désigne par A la position du cylindre au bas du plan incliné et par B la position où il s'immobilise sur la pente :



$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

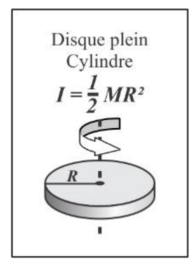
On peut décomposer l'énergie mécanique en énergie cinétique de translation, énergie cinétique de rotation et énergie potentielle gravitationnelle :

$$\underbrace{K_{trans\ B}}_{=0} + \underbrace{K_{rot\ B}}_{=0} + U_{gB} = K_{trans\ A} + K_{rot\ A} + \underbrace{U_{gA}}_{=0}$$

On développe les termes restant :

$$mgy_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2$$

On doit exprimer la vitesse angulaire en fonction de la vitesse de translation, et utiliser l'expression du moment d'inertie pour un cylindre plein (tournant autour de son axe central) :



$$\omega_A = \frac{v_A}{R} \qquad \text{et} \qquad I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$$

La hauteur finale y_B peut être laissée telle quelle, c'est la valeur recherchée :

$$mgy_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v_A}{R}\right)^2$$

On peut simplifier et ensuite isoler y_B :

$$gy_B = \frac{1}{2}v_A^2 + \frac{1}{4}v_A^2 = \frac{3}{4}v_A^2$$

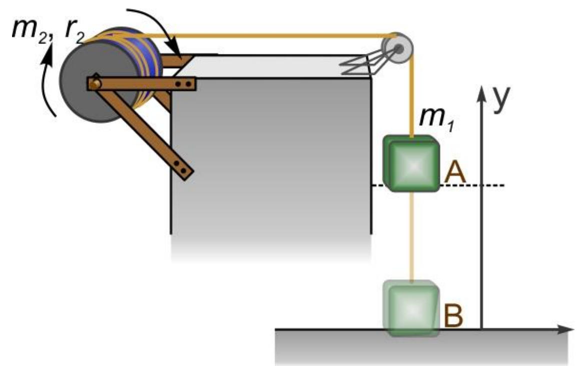
$$y_B = \frac{3v_A^2}{4g} = \frac{3\times\left(1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{4\times 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0{,}172\ m}$$

retour à la question ▲

9.28 Solution : Le déroulement retour à la question ▲

ω = 29,2 rad/s

L'énergie mécanique du système sera conservée durant la chute de la masse suspendue car aucun frottement n'est mentionné pour ce système. On peut donc écrire :



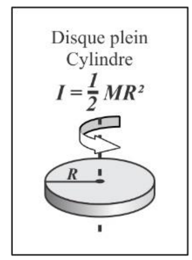
$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

Désignons par m_1 la masse suspendue et par m_2 le cylindre. Lors du mouvement, l'énergie cinétique de la masse 1 se limitera à de l'énergie cinétique de translation car elle ne tourne pas, alors que l'énergie cinétique de la masse 2 se limitera à de l'énergie cinétique de rotation, car elle ne se déplace pas. Aussi, la masse 2 est à la même hauteur tout au long du mouvement; choisissons cette hauteur pour sa référence de hauteur, alors son énergie potentielle gravitationnelle sera toujours nulle. Pour la masse 1, choisissons le sol comme référence de hauteur. C'est donc son énergie potentielle gravitationnelle finale qui est nulle.
On peut développer ainsi chaque terme d'énergie mécanique et faire les annulations suivantes :

$$K_{trans-1B} + \underbrace{K_{rot-1B}}_{=0} + \underbrace{K_{trans-2B}}_{=0} + K_{rot-2B} + \underbrace{U_{g1B}}_{=0} + \underbrace{U_{g2B}}_{=0} = \underbrace{K_{trans-1A}}_{=0} + \underbrace{K_{rot-1A}}_{=0} + \underbrace{K_{trans-2A}}_{=0} + \underbrace{K_{rot-2A}}_{=0} + U_{g1A} + \underbrace{U_{g2A}}_{=0}$$

Si on développe les termes non nuls :

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_{2B}^2 = m_1 g y_{1A}$$



Le cylindre est un cylindre plein tournant autour de son centre, donc : $I_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2$.
La vitesse de la masse 1, v_{1B}, peut être exprimée en fonction de la vitesse angulaire de la masse 2, car la corde lie directement ces deux mouvements :

$$v_{1B} = \omega_{2B} r_2$$

L'équation principale devient alors :

$$\frac{1}{2}m_1(\omega_{2B}r_2)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2 r_2^2\right)\omega_{2B}^2 = m_1 g y_{1A}$$

On peut simplifier cette expression et ensuite isoler ω_2 :

$$\left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{4}m_2\right) r_2^2 \omega_{2B}^2 = m_1 g y_{1A}$$

$$\omega_{2B} = \sqrt{\frac{m_1 g y_{1A}}{\left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{4}m_2\right) r_2^2}}$$

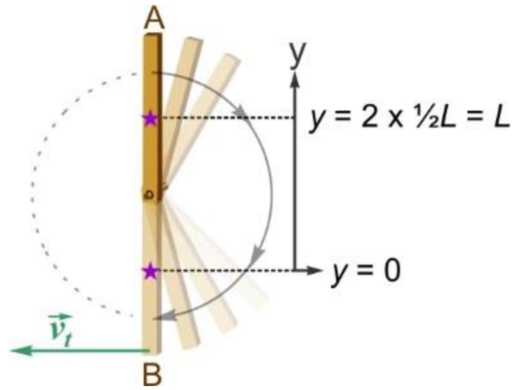
$$\omega_{2B} = \sqrt{\frac{0{,}600\ \text{kg} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1{,}3\ \text{m}}{\left(\frac{1}{2}\times 0{,}600\ \text{kg} + \frac{1}{4}\times 1{,}10\ \text{kg}\right)\times(0{,}125\ \text{m})^2}} = \mathbf{29{,}2\ \frac{rad}{s}}$$

retour à la question ▲

9.29 Solution : La tige verticale retour à la question ▲

a) ω = 7,67 rad/s

On cherche la vitesse angulaire ω de la tige entière après une rotation d'un demi-tour de la tige. Si on veut répondre en traitant l'énergie (méthode la plus simple), on doit constater que c'est l'énergie potentielle gravitationnelle qui se transforme en énergie cinétique durant la chute. On doit alors choisir une référence de hauteur pour la tige, en considérant l'indice donné avec la question.



On indique qu'on peut considérer que la hauteur de la masse de la tige est la hauteur de son centre de masse. La raison en est que la tige est étendue dans l'espace et n'occupe pas qu'une seule hauteur. Cependant, à partir du centre de masse, on constate rapidement que pour chaque point de la tige plus haut que ce point, il y en a un plus bas et de la même distance. On peut donc choisir comme référence de hauteur la hauteur du centre de masse dans la position finale (voir figure ci-contre). La hauteur initiale sera donc le double de la demi-longueur de la tige, c'est-à-dire que $y_A = L$.

Aussi, on doit constater qu'il n'y aura aucune force non conservative durant la chute. L'équation du traitement de l'énergie est donc :

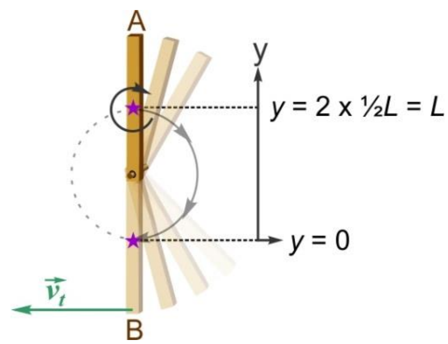
$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

On décompose chaque terme d'énergie par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle (pour une seule masse) :

$$K_{trans-B} + K_{rot-B} + U_{gB} = K_{trans-A} + K_{rot-A} + U_{gA}$$

Pour déterminer quels termes sont nuls, on doit d'abord reconnaître ou distinguer la translation et la rotation dans le mouvement de la tige. Deux options sont correctes alors : on pourrait voir une tige qui ne fait que tourner autour de son extrémité, ou une tige qui tourne autour de son centre, pendant que ce centre se déplace. Les deux options seront traitées. Dans chaque cas, on doit utiliser le moment d'inertie de la tige pour un axe passant par le centre de rotation considéré.

PREMIÈRE OPTION : La tige tourne autour de son centre et ce centre se déplace



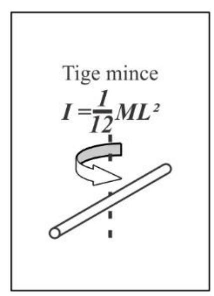
La tige est immobile au début, donc les deux formes d'énergie cinétique sont nulles au début (en A). À la fin, la tige (son centre de masse) est à la hauteur utilisée comme référence, donc une énergie potentielle gravitationnelle nulle en B :

$$K_{trans-B} + K_{rot-B} + \underbrace{U_{gB}}_{=0} = \underbrace{K_{trans-A}}_{=0} + \underbrace{K_{rot-A}}_{=0} + U_{gA}$$

On développe ensuite chaque terme restant, en considérant un moment d'inertie dont l'axe est le centre de rotation assumé, donc le centre de masse. La vitesse v_B est alors celle du centre de masse :

$$\frac{1}{2}mv_{CM-B}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_B^2 = mgy_A$$

Puisqu'on cherche ω, c'est la vitesse v_{CM} que l'on va substituer, par $v_{CM} = \omega r$, avec un rayon qui est celui du déplacement du centre de masse autour du point fixe, donc $r = ½L$. Aussi, le moment d'inertie pour une tige tournant autour de son centre de masse est $I_{CM} = mL^2/12$:



$$\frac{1}{2}m\left(\omega_B\left(\frac{1}{2}L\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\omega_B^2 = mgL$$

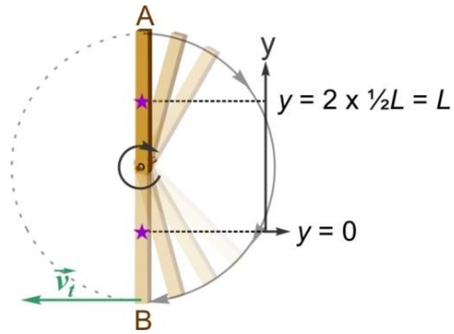
On peut alors simplifier et isoler ω_B :

$$\frac{1}{8}\omega_B^2L^2 + \frac{1}{24}\omega_B^2L^2 = gL$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{6g}{L}} = \sqrt{\frac{6\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1\text{ m}}} = 7{,}67\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

DEUXIÈME OPTION : La tige tourne autour de son extrémité fixe, cette extrémité ne se déplace pas.

[Équations]   [Sect 9.2, #1 à 11]   [Sect 9.3, #12 à 20]   [Sect 9.4, #21 à 33]



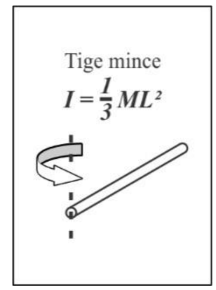
La tige est immobile au début, donc les deux formes d'énergie cinétique sont nulles au début (en A). À la fin, la tige (son centre de masse) est à la hauteur utilisée comme référence, donc une énergie potentielle gravitationnelle nulle en B. Par ailleurs, puisqu'on considère que le centre de rotation est l'extrémité fixe et que cette extrémité ne subit aucune translation, il n'y a aucune énergie cinétique de translation à la fin :

$$\underbrace{K_{trans-B}}_{=0} + K_{rot-B} + \underbrace{U_{gB}}_{=0} \quad = \quad \underbrace{K_{trans-A}}_{=0} + \underbrace{K_{rot-A}}_{=0} + U_{gA}$$

On développe ensuite chaque terme restant, en considérant un moment d'inertie dont l'axe est le centre de rotation assumé, donc l'extrémité de la tige :

$$\frac{1}{2} I_{ext} \omega_B^2 \quad = \quad m g y_A$$

Le moment d'inertie pour une tige tournant autour de son extrémité est $I_{CM} = ml^2/3$:



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m L^2\right) \omega_B^2 \quad = \quad m g L$$

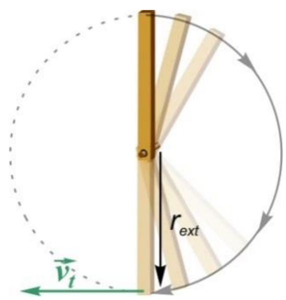
On peut alors simplifier et isoler ω_B :

$$\frac{1}{6} \omega_B^2 L^2 \quad = \quad g L$$

$$\omega_B \quad = \quad \sqrt{\frac{6g}{L}} \quad = \quad \sqrt{\frac{6 \times 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1\ \mathrm{m}}} \quad = \quad \mathbf{7{,}67\ \frac{rad}{s}}$$

b) v = 7,67 m/s

La vitesse linéaire de l'extrémité est la vitesse tangentielle de ce point (voir figure ci-contre). Cette vitesse tangentielle est liée à la vitesse angulaire par :



$$v_{ext} = \omega r_{ext} \quad = \quad 7{,}67\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \times 1\ \mathrm{m} \quad = \quad \mathbf{7{,}67\ \frac{m}{s}}$$

retour à la question ▲

9.30 Solution : Le chariot retour à la question ▲

d = 24,7 m

Alors que le chariot se déplace à 4,5 m/s, son énergie cinétique totale est la somme de son énergie cinétique de translation et de l'énergie cinétique de rotation de ses roues. La distance qu'il parcourra en montant la pente est liée à la transformation de son énergie cinétique totale en énergie potentielle gravitationnelle, alors qu'il s'immobilisera quand toute cette énergie sera transformée. Puisque les roues roulent normalement, aucun frottement cinétique ne réduit la quantité d'énergie cinétique. On peut donc écrire :

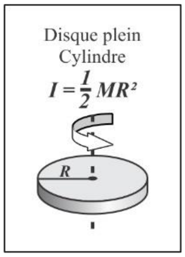
$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

$$\underbrace{K_{trans\ B}}_{=0} + \underbrace{K_{rot\ B}}_{=0} + U_{gB} = K_{trans\ A} + K_{rot\ A} + \underbrace{U_{gA}}_{=0}$$

On développe les termes restant, avec l'énergie cinétique de rotation qui est celle de 4 roues identiques :

$$m_{tot} g y_B = \frac{1}{2} m_{tot} v_A^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2} I \omega_A^2\right)$$

La masse en translation est la masse totale du chariot et de ses roues (m_{tot} = 16 kg), alors que la masse en rotation est strictement celle des quatre roues.



Puisque la vitesse initiale nous est fournie, on doit exprimer la vitesse angulaire en fonction de cette vitesse de translation, et utiliser l'expression du moment d'inertie pour un cylindre plein (tournant autour de son axe central) :

$$\omega_A = \frac{v_A}{R} \qquad \text{et} \qquad I_{CM} = \frac{1}{2} m_{roue} R^2$$

La hauteur finale y_B est liée à la distance recherchée par :

$$y_B = d \sin\theta$$

L'équation principale devient donc :

$$m_{tot} g (d \sin\theta) = \frac{1}{2} m_{tot} v_A^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_{roue} R^2\right)\left(\frac{v_A}{R}\right)^2\right)$$

On peut simplifier et isoler la distance d :

$$m_{tot} g d \sin\theta = \frac{1}{2} m_{tot} v_A^2 + m_{roue} v_A^2$$

$$d = \frac{\left(\frac{1}{2} m_{tot} + m_{roue}\right) \times v_A^2}{m_{tot} g \times \sin\theta}$$

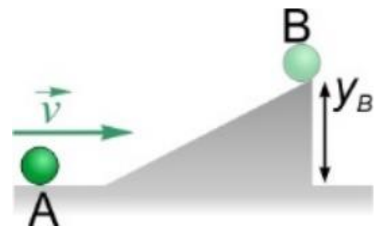
$$d = \frac{\left(\frac{1}{2}(8\text{ kg} + 4 \times 2\text{ kg}) + 2\text{ kg}\right) \times \left(4{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{(8\text{ kg} + 4 \times 2\text{ kg}) \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \sin 3{,}0°} = \mathbf{24{,}7\ m}$$

retour à la question ▲

9.31 Solution : La rampe de lancement retour à la question ▲

d = 0,350 m

La bille roule, alors elle tourne et se déplace. Lorsqu'elle monte sur la surface inclinée, une partie de son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle gravitationnelle; on devine qu'elle a encore de la vitesse en haut du plan incliné et cette vitesse lui permettra de dépasser l'extrémité du plan incliné et devenir un projectile. On doit donc trouver la vitesse résiduelle au haut du plan incliné pour traiter ensuite le mouvement de projectile de la bille. Pour la phase de la montée, de A à B, en l'absence de forces non conservatives, on peut écrire :



$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

$$K_{trans\ B} + K_{rot\ B} + U_{gB} = K_{trans\ A} + K_{rot\ A} + \underbrace{U_{gA}}_{=0}$$

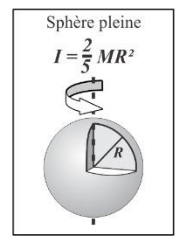
$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_B^2 + mgy_B = \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_A^2$$

Puisque la bille roule sans glisser, sa vitesse de translation en A comme en B est liée à sa vitesse angulaire ω. Puisque la vitesse est donnée, c'est la vitesse angulaire qu'on substituera.

$$v = \omega R \quad ➔ \quad \omega = \frac{v}{R}$$

Aussi, une bille étant une sphère pleine, on utilisera son moment d'inertie par rapport à son centre, ainsi la vitesse de translation à utiliser sera bien la vitesse de 2,10 m/s :

$$I_{CM} = \tfrac{2}{5}mR^2$$



Pour le terme de l'énergie potentielle gravitationnelle, seule la hauteur y_B du plan incliné suffit. L'inclinaison n'a aucune influence sur l'énergie cinétique perdue en montant. L'équation principale devient :

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}mR^2\right)\left(\tfrac{v_B}{R}\right)^2 + mgy_B = \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}mR^2\right)\left(\tfrac{v_A}{R}\right)^2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 + \tfrac{1}{5}mv_B^2 + mgy_B = \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{5}mv_A^2$$

$$\tfrac{7}{10}v_B^2 + gy_B = \tfrac{7}{10}v_A^2$$

La vitesse en B, au sommet du plan incliné, est donc donnée par :

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - \tfrac{10}{7}gy_B}$$

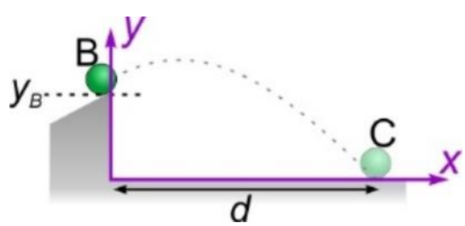
$$v_B = \sqrt{\left(2{,}10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \tfrac{10}{7} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}110\text{ m}} = 1{,}69\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Au point B, la bille devient un projectile, avec une vitesse de 1,72 m/s orientée à 20° au-dessus de l'horizontale. Établissons les paramètres et les équations pour le mouvement de B à C, en considérant un axe au pied du sommet de la surface inclinée :

$x_B = 0$
$x_C = ??$
$v_{xB} = v_B \cos 20°$
$v_{xC} = v_{xB}$
$a_x = 0$

$y_B = 0$
$y_C = 0{,}110$
$v_{yB} = v_B \sin 20°$
$v_C = ?$
$a_y = -g = -9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$t = ?$



Les équations utiles pour un mouvement de projectile sont :

$$x_C = x_B + v_{xB}t \qquad (1) \qquad\qquad y_C = y_B + v_{yB}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

$$v_{yC} = v_{yB} - gt \qquad (3)$$

L'équation de la position en *y* permet de trouver la durée du mouvement de projectile, qu'on utilisera ensuite pour trouver la position d'atterrissage x_C :

$$0 = y_B + (v_B \sin 20°)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$t = \frac{-(v_B \sin 20°) \pm \sqrt{(v_B \sin 20°)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{2}g\right)\times(y_B)}}{2\times\left(-\frac{1}{2}g\right)}$$

$$t = \frac{-(1{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times\sin 20°) \pm \sqrt{\left(1{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times\sin 20°\right)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{2}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\times(0{,}110\text{ m})}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = \begin{matrix}\to -0{,}102\text{ s}\\ \to \;\;0{,}220\text{ s}\end{matrix}$$

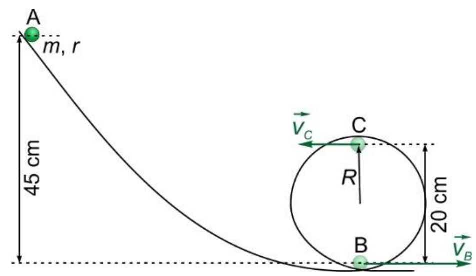
La durée positive permet finalement de trouver la distance x parcourue :

$$x_C = x_B + v_{xB}t \;=\; 0 + \left(1{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\cos 20°\right)\times 0{,}220\text{ s} \;=\; \mathbf{0{,}350\text{ m}}$$

retour à la question ▲

9.32 Solution : La boucle verticale retour à la question ▲

a) v = 2,51 m/s



Si la bille roule, aucune force de frottement cinétique ne réduit la quantité d'énergie mécanique. Il y aura donc conservation de l'énergie mécanique, et on peut écrire :

$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

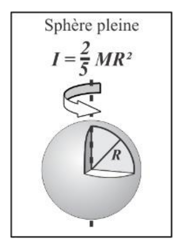
La bille roule et se déplace, donc son énergie cinétique se partage en deux termes. En appelant A et B les points aux extrémités de la descente et en considérant une référence de hauteur au point le plus bas :

$$K_{trans\ B} + K_{rot\ B} + \underbrace{U_{gB}}_{=0} = \underbrace{K_{trans\ A}}_{=0} + \underbrace{K_{rot\ A}}_{=0} + U_{gA}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 = mgy_A$$

La vitesse de translation en B est liée à la vitesse angulaire ω. Puisqu'on cherche la vitesse, c'est la vitesse angulaire qu'on substituera :

$$v = \omega r \quad ➔ \quad \omega = \frac{v}{R}$$



Aussi, une bille étant une sphère pleine, on utilisera son moment d'inertie par rapport à son centre, et la vitesse de translation à utiliser sera bien la vitesse recherchée :

$$I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$$

En intégrant ces dernières expressions à l'équation principale :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_B}{r}\right)^2 = mgy_A$$

Il ne reste qu'à simplifier et trouver la vitesse v_B :

$$\frac{1}{2}v_B^2 + \frac{1}{5}v_B^2 = gy_A$$

$$v_B = \sqrt{\frac{10}{7}gy_A} = \sqrt{\frac{10}{7}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}45\text{ m}} = \mathbf{2{,}51\,\frac{m}{s}}$$

b) v = 1,87 m/s

Durant la montée de la bille jusqu'au sommet de la boucle, il n'y a encore aucun frottement cinétique, il y aura donc conservation de l'énergie mécanique.

Le sommet de la boucle doit être le point final du mouvement analysé. On peut cependant choisir le point initial, et le fait de partir du point A à nouveau simplifiera les équations (manipuler un termine d'énergie potentielle gravitationnelle plutôt que deux termes d'énergie cinétique en B). On peut donc écrire :

$$E_C = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

La bille roule et se déplace, donc son énergie cinétique se partage en deux termes. En appelant A et C les points aux extrémités du parcours et en considérant une référence de hauteur au point le plus bas :

$$K_{trans\ C} + K_{rot\ C} + U_{gC} = \underbrace{K_{trans\ A}}_{=0} + \underbrace{K_{rot\ A}}_{=0} + U_{gA}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega_C^2 + mgy_C \quad = \quad mgy_A$$

De la même façon qu'en a), on aura :

$$\omega = \frac{v}{R} \qquad \text{et} \qquad I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$$

On doit ajouter cette fois-ci un lien entre la hauteur y_C et le rayon de la boucle. Au sommet de la boucle, la bille est à une distance $2R$ au-dessus du point le plus bas (toujours utilisé comme référence) :

$$y_C = 2R \qquad \text{avec} \qquad R = \frac{1}{2} \times 20\ \text{cm} \quad = \quad 0{,}10\ \text{m}$$

L'équation principale devient alors :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_C}{r}\right)^2 + mg(2R) \quad = \quad mgy_A$$

Il ne reste qu'à simplifier et trouver la vitesse v_C :

$$\frac{1}{2}v_C^2 + \frac{1}{5}v_C^2 + 2gR \quad = \quad gy_A$$

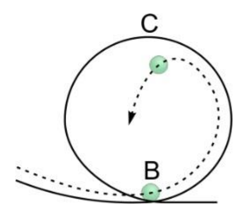
$$\frac{7}{10}v_C^2 \quad = \quad g(y_A - 2R) \qquad (1)$$

$$v_C \quad = \quad \sqrt{\frac{10}{7}g(y_A - 2R)}$$

$$v_C \quad = \quad \sqrt{\frac{10}{7} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times (0{,}45\ \text{m} \quad - \quad 2 \times 0{,}10\ \text{m})} \quad = \quad \mathbf{1{,}87\ \frac{m}{s}}$$

c) R = 0,167 m

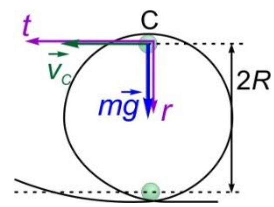
On doit comprendre que le rayon sera différent de celui utilisé en a) et b), et alors la vitesse trouvée en b) au sommet de la boucle n'est plus valide car elle correspond au scénario où le rayon est de 10 cm. Cependant, l'expression de la vitesse développée en b) est toujours valide, et R prendra la nouvelle valeur cherchée en c).



Si la bille va trop lentement au sommet de la boucle, elle retombera sans suivre la surface de la boucle (voir figure ci-contre). Dit autrement, si le rayon de la boucle est trop grand, la bille aura trop ralenti en montant et retombera et perdra contact avec la surface avant d'atteindre le sommet.

Le rayon maximal est donc lié au scénario où la bille reste en tout juste en contact avec la surface au point le plus haut, sans s'y appuyer. Si elle demeure tout juste en contact sans s'y appuyer, la force normale qu'elle subit provenant de la surface est donc nulle, et seule la force gravitationnelle agit sur la bille lors du passage au sommet. L'analyse des forces fournira donc un lien entre la vitesse (tangentielle) et l'accélération gravitationnelle.

Au niveau de l'énergie, le traitement de la conservation de l'énergie jusqu'au point C entraîne les mêmes étapes qu'en b), et le passage par la même équation (1) qu'on y a obtenue :



$$(1) \qquad \frac{7}{10}v_C^2 \quad = \quad g(y_A - 2R)$$

Le traitement des équations des forces amène l'autre partie de la solution. Puisqu'il n'y qu'une force agissant radialement :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = mg \quad = \quad \frac{mv_C^2}{R} \qquad \rightarrow \qquad v_C^2 = gR$$

On peut alors insérer cette expression de v^2 dans l'équation (1) pour isoler et calculer le rayon R correspondant :

$$(1) \qquad \frac{7}{10}gR = g(y_A - 2R)$$

$$\frac{7}{10}R + 2R = y_A$$

$$R = \frac{10}{27}y_A \quad = \quad \frac{10}{27} \times 0{,}45\ \text{m} \quad = \quad \mathbf{0{,}167\ m}$$

retour à la question ▲

9.33 Solution : La poulie retour à la question ▲

v = 1,59 m/s

La présence du frottement cinétique entrainera une perte d'énergie mécanique. L'équation de départ est :

$$E \quad = \quad E_0 + W_{nc}$$

On développe chaque terme, en considérant de l'énergie cinétique de translation seulement pour les deux masses m_1 et m_2 qui se déplacent, et de l'énergie cinétique de rotation uniquement pour la poulie qui ne fait que tourner. Aussi, tout est immobile à l'instant initial, et la référence de hauteur pour chaque masse est sa hauteur initiale :

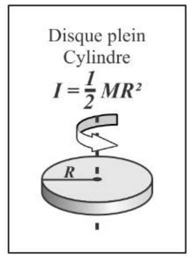
$$K_{trans-1} + K_{trans-2} + K_{rot-M} + \underbrace{U_{g1}}_{=0} + U_{g2} + \underbrace{U_{gM}}_{=0} \quad = \quad \underbrace{K_{trans-1\ 0}}_{=0} + \underbrace{K_{trans-2\ 0}}_{=0} + \underbrace{K_{rot-M\ 0}}_{=0} + \underbrace{U_{g1\ 0}}_{=0} + \underbrace{U_{g2\ 0}}_{=0} + \underbrace{U_{gM\ 0}}_{=0} + W_f$$

On développe chaque terme restant, en appelant d la distance parcourue par la masse m_1 :

$$\tfrac{1}{2}m_1v^2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + m_2gy_2 \quad = \quad f_cd \cdot \cos\theta_{fd}$$

La poulie, qu'on peut considérer comme un disque plein, tourne autour de son centre et aura un moment d'inertie défini par :

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2$$



On peut exprimer la vitesse angulaire finale ω en fonction de la vitesse v recherchée, car la vitesse angulaire de la poulie est liée à la vitesse de translation des masses par la corde qui la contourne sans glisser :

$$v = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R}$$

Si on a choisi comme référence de hauteur pour m_2 sa hauteur initiale, sa hauteur finale sera une distance d sous son point de départ, donc :

$$y_2 = -d$$

Aussi, la force de frottement cinétique sur la masse m_1, définie par $f_c = \mu_c N$, demande qu'on définisse la force normale à partir de l'équation de la somme des forces dans l'axe vertical :

$$\sum \vec{F} = m_1\vec{a} = \vec{N} + m_1\vec{g} + \vec{f_c}$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{0} = N - m_1g = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m_1g$$

L'équation principale devient donc :

$$\tfrac{1}{2}m_1v^2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\left(\tfrac{v}{R}\right)^2 + m_2g(-d) \quad = \quad (\mu_cm_1g)d \cdot \cos 180°$$

La vitesse v est la seule inconnue. On simplifie et on l'isole pour la calculer :

$$\tfrac{1}{2}m_1v^2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2 + \tfrac{1}{4}Mv^2 - m_2gd \quad = \quad -\mu_cm_1gd$$

$$v \quad = \quad \sqrt{\frac{(m_2 - \mu_cm_1)gd}{\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{4}M}}$$

$$v \quad = \quad \sqrt{\frac{(0{,}600\text{ kg} - 0{,}22\times 0{,}800\text{ kg})\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}50\text{ m}}{\frac{1}{2}\times 0{,}800\text{ kg} + \frac{1}{2}\times 0{,}600\text{ kg} + \frac{1}{4}\times 0{,}500\text{ kg}}} \quad = \quad \mathbf{1{,}59\ \frac{m}{s}}$$

retour à la question ▲