1 à 11 12 à 21

# CH 8 LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

## ÉQUATIONS LIÉES AU CHAPITRE :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

$$\vec{J} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1)$$

$$\vec{F}_{rés} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

## 8.1 IMPULSION ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT

**8.1** Exercices : L'étendue solution ►

Déterminez le module de la quantité de mouvement des objets suivants :

a) Un bloc de 10 kg se déplaçant à 4,50 m/s.
b) Une balle de fusil de 9,5 g se déplaçant à 375 m/s.
c) Une automobile de 1230 kg se déplaçant à 45 km/h.
d) Un astéroïde de $3\times10^8$ kg se déplaçant à 2 500 m/s.
e) Une étoile filante est couramment une particule de la taille d'un grain de sable entrant dans l'atmosphère à très haute vitesse, par exemple une particule de 75 mg filant à 43,5 km/s.
f) Un électron ($m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg) se déplace sur son orbite à $2{,}19\times10^6$ m/s.

**8.2** Exercices : Auto et camion solution ►

Quelle vitesse devrait avoir une automobile de 1345 kg pour avoir la même quantité de mouvement qu'un camion de $25{,}3\times10^3$ kg se déplaçant à 60 km/h?

**8.3** Exercice : L'impulsion solution ►

Une force $\vec{F} = (275\,\vec{i} + 180\,\vec{j}\,)$ N agit durant 25 ms sur une masse de 750 g au repos.

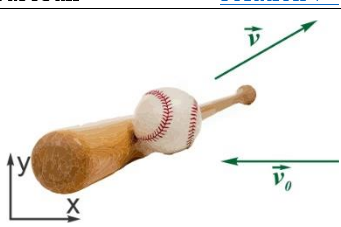
a) Quelle est le module de l'impulsion subie par la masse?
b) Quelle sera la vitesse de la masse après l'impulsion?

**8.4** Exercice : Feu! solution ►

Le canon d'une carabine Winchester mesure 76,0 cm et une balle de fusil de 10,5 g subit une accélération moyenne de $3{,}8\times10^5$ m/s² tout le long du canon lorsqu'on fait feu. Déterminez le module de l'impulsion subie par la balle.

**8.5** Exercice : La balle de baseball solution ►

Une balle de baseball ($m$ = 146 g) se dirige à 41,2 m/s vers le frappeur, horizontalement, et est frappée en direction opposée, à 30° au-dessus de l'horizontale, à 62,5 m/s. Si le contact dure 7,6 ms, déterminez la force moyenne que le bâton applique sur la balle.



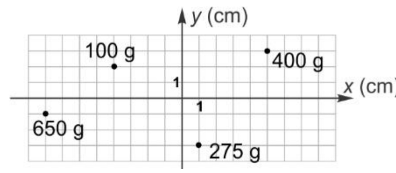

## 8.2 LE CENTRE DE MASSE

**8.6** Exercice : Centre de masse 1D solution ►

Déterminez la position du centre de masse d'un système de trois masses de 1 kg, 2 kg et 3 kg situées respectivement à $x$ = 1 m, $x$ = 2 m et $x$ = 3 m.

**8.7** Exercice : Centre de masse 2D solution ►

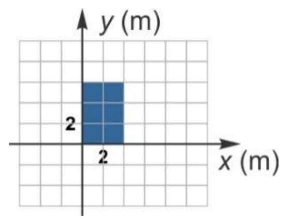
Quel est le vecteur position du centre de masse de l'ensemble de quatre masses détaillé sur la figure ci-contre.



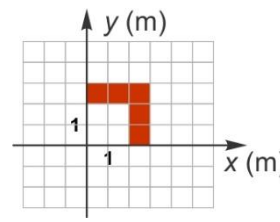

**8.8** Exercice : Centre de masse d'une aire solution ►

Déterminez la position du centre de masse dans les 3 situations suivantes, sachant que chaque carré individuel a une masse de 5 kg.

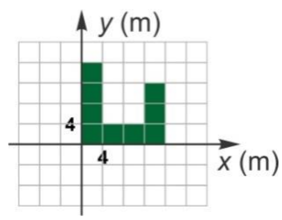
a)




b)




c)

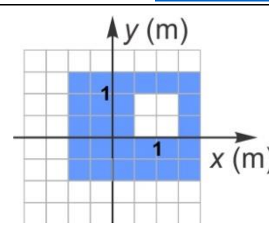



**8.9** Exercice : La Ferrari Pista solution ►

L'empattement de la Ferrari Pista est de 2,65 m (voir figure) et 59% du poids repose sur les roues arrière. Déterminez à quelle distance devant les roues arrière se trouve le centre de masse.

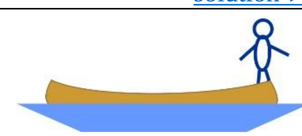

**8.10** Exercice : Le trou solution ►

Une planche carrée dont la masse surfacique est de 3,7 kg/m² est percée d'un trou carré à l'endroit illustré sur la figure. Déterminez le centre de masse de cette planche trouée. (Indice : un trou a l'effet d'une plaque de masse négative ajoutée au même endroit que le trou.)




**8.11** Exercice : Le canot solution ►

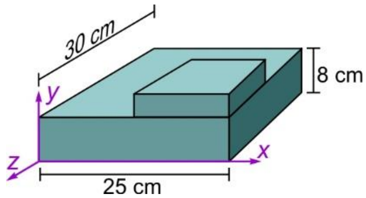
Une personne de 62 kg se trouve à l'avant d'un canot de 4,2 m et d'une masse de 31 kg, immobile (voir figure ci-contre). Si la personne marche dans le canot jusqu'à l'autre extrémité, de quelle



**8.1**- a) $p$ = 45,0 kg·m/s — b) $p$ = 3,56 kg·m/s — c) $p = 1{,}54\times10^4$ kg·m/s — d) $p = 7{,}50\times10^{11}$ kg·m/s — e) $p$ = 3,26 kg·m/s — f) $p = 1{,}99\times10^{-24}$ kg·m/s — **8.2**- $v$ = 1 129 km/h — **8.3**- a) $\vec{J} = (6{,}88\,\vec{i} + 4{,}50\,\vec{j}\,)$ kg·m/s — b) $v = (9{,}17\,\vec{i} + 6{,}00\,\vec{j}\,)$ m/s — **8.4**- $J$ = 7,98 kg·m/s — **8.5**- $\vec{F} = (1\,831\,\vec{i} + 600\,\vec{j}\,)$ N — **8.6**- $x_{CM}$ = 2,33 m — **8.7**- $\vec{r} = (-2{,}33\,\vec{i} - 0{,}0526\,\vec{j}\,)$ cm — **8.8**- a) $\vec{r} = (2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\,)$ m — b) $\vec{r} = (1{,}9\,\vec{i} + 1{,}9\,\vec{j}\,)$ m — c) $\vec{r} = (7{,}33\,\vec{i} + 6{,}00\,\vec{j}\,)$ m — **8.9**- $d$ = 1,09 m — **8.10**- $\vec{r} = (0{,}423\,\vec{i} + 0{,}212\,\vec{j}\,)$ m — **8.11**- $d$ = 2,8 m vers la gauche distance se déplacera le canot? (On néglige la résistance de l'eau.)

**8.12** Exercice : Les deux blocs — solution ▶

Deux blocs sont empilés tel qu'illustré sur la figure ci-contre. Toutes les dimensions du bloc du dessus sont deux fois plus petites que celles du bloc en-dessous. Déterminez la position du centre de masse de l'assemblage sachant que la masse volumique du matériau des blocs est de 2,5 g/cm³.



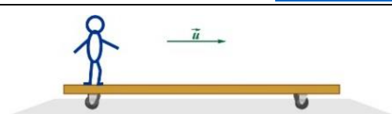

## 8.3 LA CONSERVATATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

**8.13** Exercice : Yosemite Sam — solution ▶

Yosemite Sam s'apprête à tirer avec son canon un boulet de 17 kg à partir de son navire, immobile sur l'eau. Le navire, son canon et lui-même ont une masse totale de 255 kg (excluant le boulet). Si le boulet est projeté à 230 m/s, à quelle vitesse (en module) sera propulsé le bateau après le tir?

**8.14** Exercice : La plate-forme — solution ▶

Une personne de 55 kg se trouve près de l'extrémité arrière d'une plate-forme de 175 kg, roulant à 8 m/s. La personne se met à courir vers l'avant de la plate-forme et se déplace à 7,5 m/s par rapport à la plate-forme. À quelle vitesse se déplacera la plate-forme et dans quelle direction? (La plate-forme peut rouler sans frottement.)



**8.15** Exercice : Molécule en skate — solution ▶

Molécule le chat (3,8 kg) court à 9,25 m/s et saute sur un skateboard de 1,7 kg, aligné avec la direction de sa course. Quelle sera la vitesse de Molécule en skate?

**8.16** Exercice : L'explosion — solution ▶

Une masse de 7 kg immobile explose en trois fragments. Un fragment de 2,5 kg est éjecté à 7 m/s dans une orientation de 215° et un autre fragment de 3 kg est éjecté à 8,3 m/s à une orientation de 308°. Quelle est la vitesse et l'orientation du 3ᵉ fragment?

**8.17** Exercice : Le lancer double — solution ▶

Deux masses de 2 kg sont attachées ensemble et munies d'une petite charge explosive. On lance le tout à 25,6 m/s dans une orientation de 30° au-dessus du sol, et la charge explose 1,5 s après le lancer. Les deux fragments sont projetés horizontalement l'un par rapport à l'autre et deviennent deux projectiles distincts qui touchent le sol en même temps. L'un des fragments touche le sol à 75,4 m du point de lancement. À quelle distance est tombé le 2ᵉ fragment?

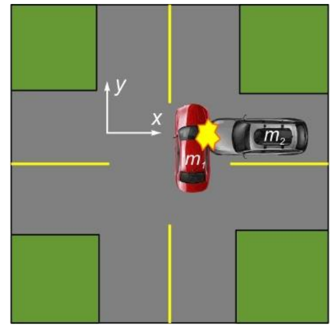
## 8.4 LES COLLISIONS

**8.18** Exercice : Le train — solution ▶

Un train de 945 tonnes se reculant à 3,5 m/s rencontre un wagon de 45 tonnes immobile pour le fixer à son extrémité. Quelle sera la vitesse du train après l'ajout de ce nouveau wagon?

**8.19** Exercice : L'accident — solution ▶

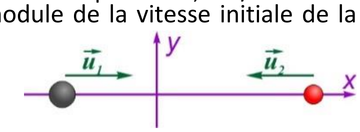
Deux voitures $m_1$ = 1 350 kg et $m_2$ = 1 710 kg omettent de faire leur arrêt à une intersection entre deux rues perpendiculaires. Les deux voitures roulent à 50 km/h lorsque la voiture de masse $m_1$ frappe l'autre latéralement (voir figure). La collision fait en sorte que la voiture $m_1$ est propulsée à 57,3 km/h à 58° par rapport à la direction de sa vitesse initiale. (On néglige le frottement durant le contact.)




a) Quelle impulsion (vecteur) a subi $m_1$ lors de l'impact?
b) La voiture de masse $m_1$ a subi une variation de sa quantité de mouvement. Cela peut-il être cohérent avec le principe universel de la conservation de la quantité de mouvement?
c) Quelle impulsion (vecteur) a subi $m_2$ lors de l'impact?
d) Quelle est la vitesse de $m_2$ immédiatement après l'impact?

**8.20** Exercice : Collision de boules — solution ▶

Deux boules, $m_1$ = 600 g et $m_2$ = 450 g, se déplaçant l'une vers l'autre sur un même axe se frappent dans une collision élastique. La première boule se déplace à 4,5 m/s avant la collision. Déterminez le module de la vitesse initiale de la seconde boule dans les conditions suivantes, en accord avec les axes illustrés ci-contre :

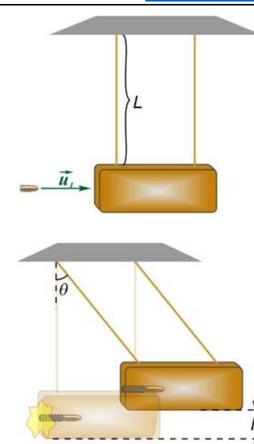



a) la première boule se dirige dans la même direction après la collision, à 0,2 m/s;
b) la première boule rebondit en direction opposée à 1,2 m/s;
c) la première boule dévie de 72° lors de la collision, en conservant la même vitesse, alors que la 2ᵉ boule dévie de 50°.

**8.21** Exercice : Le pendule balistique — solution ▶

Pour déterminez la vitesse d'une balle de fusil, on peut faire feu dans un bloc de masse connue suspendu à des cordes (c'est un pendule balistique).

Pour notre pendule balistique, le bloc qui absorbe la balle a une masse de 2,50 kg, et la balle du fusil une masse de 9,5 g. Alors que la balle s'incruste dans le bloc de bois, celui-ci se soulève de 10,5 cm.




a) La collision entre la balle de fusil et le bloc appartient à quelle catégorie de collision?
b) Quelle était la vitesse de la balle de fusil au moment où elle a touché le bloc?
c) Sachant que les cordes mesurent 0,50 m, de quel angle se sont incliné les cordes?

**8.12**- $\vec{r}$ = (13,2 $\vec{i}$ +4,67 $\vec{j}$ −14,2 $\vec{k}$ ) cm — **8.13**- $v$ = 15,3 m/s — **8.14**- $v$ = 6,21 m/s — **8.15**- $v$ = 6,39 m/s — **8.16**- $v$ = 19,8 m/s, $\theta$ = 91,9° — **8.17**- $d$ = 40,3 m

**8.18**- $v$ = 3,34 m/s — **8.19**- a) $\vec{J}_1$ = (−18,2 $\vec{i}$ −7,36 $\vec{j}$ )×10³ kg·m/s — b) ↓↓↓ — c) $\vec{J}_2$ = (18,2 $\vec{i}$ +7,36 $\vec{j}$ )×10³ kg·m/s — d) $\vec{v}$ = (−11,6 $\vec{i}$ +15,5 $\vec{j}$ ) km/h

**8.20**- a) $u_2$ = 0,517 m/s — b) $u_2$ = 2,15 m/s — c) $u_2$ = 8,93 m/s — **8.21**- a) Collision inélastique — b) $u_1$ = 379 m/s — c) $\theta$ = 37,8°

# CH 8 LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

## 8.1 L'IMPULSION ET LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

**8.1** Solution : L'étendue retour à la question ▲

a) $p$ = 45,0 kg·m/s

$$p = mv \quad = \quad 10\,\text{kg} \times 4{,}50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad = \quad 45{,}0\,\tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

b) $p$ = 3,56 kg·m/s

$$p = mv \quad = \quad 0{,}0095\,\text{kg} \times 375\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad = \quad 3{,}56\,\tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

c) $p = 1{,}54\times10^{4}$ kg·m/s

$$p = mv \quad = \quad 1230\,\text{kg} \times \tfrac{45}{3{,}6}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad = \quad 1{,}54\times10^{4}\,\tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

d) $p = 7{,}50\times10^{11}$ kg·m/s

$$p = mv \quad = \quad 3\times10^{8}\,\text{kg} \times 2\,500\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad = \quad 7{,}50\times10^{11}\,\tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

e) $p$ = 3,26 kg·m/s

$$p = mv \quad = \quad 75\times10^{-6}\,\text{kg} \times 43{,}5\times10^{3}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad = \quad 3{,}26\,\tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

f) $p = 1{,}99\times10^{-24}$ kg·m/s

$$p = mv \quad = \quad 9{,}11\times10^{-31}\,\text{kg} \times 2{,}19\times10^{6}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad = \quad 1{,}99\times10^{-24}\,\tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

**8.2** Solution : Auto et camion retour à la question ▲

$v$ = 1 129 km/h

Si on considère la même quantité de mouvement pour les deux véhicules, on peut écrire :

$$p_{auto} = p_{camion}$$

$$m_a v_a = m_c v_c$$

$$v_a = \frac{m_c v_c}{m_a} \quad = \quad \frac{25{,}3\times10^{3}\,\text{kg}\times 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{1\,345\,\text{kg}} \quad = \quad 1\,129\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}$$

**8.3** Solution : L'impulsion retour à la question ▲

a) $\vec{J}$ = (6,88 $\vec{i}$ +4,50 $\vec{j}$ ) kg·m/s

L'impulsion est entre autres définie par le produit de la force et de la durée d'application de la force :

$$\vec{J} = \vec{F}\cdot\Delta t \quad = \quad \left(275\vec{i} + 180\vec{j}\right)\text{N}\times 25\times10^{-3}\,\text{s} \quad = \quad \left(6{,}875\vec{i} + 4{,}5\vec{j}\right)\tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

b) $\vec{v}$ = (9,17 $\vec{i}$ +6,00 $\vec{j}$ ) m/s

L'impulsion est aussi égale à la variation de la quantité de mouvement, celle-ci étant liée à la vitesse :

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} \quad = \quad \vec{p} - \vec{p}_0 \quad = \quad m\left(\vec{v} - \underbrace{\vec{v}_0}_{=0}\right) \quad = \quad m\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{J}}{m} = \frac{\left(6{,}875\vec{i} + 4{,}5\vec{j}\right)\frac{\text{kg·m}}{\text{s}}}{0{,}750\ \text{kg}} = \left(9{,}17\vec{i} + 6{,}00\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## 8.4 Solution : Feu! retour à la question ▲

$J$ = 7,98 kg·m/s

À partir de la masse et de ses vitesses initiale et finale (la vitesse initiale étant nulle), l'impulsion est donnée par :

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\left(\vec{v} - \underbrace{\vec{v}_0}_{=0}\right) = m\vec{v}$$

Le mouvement se déroulant en une seule dimension, on peut écrire $J = mv$.

Pour évaluer la vitesse finale de la balle (à la sortie du canon), on doit procéder par cinématique :

$$x_0 = 0$$
$$x = 0{,}760\ \text{m}$$
$$v_0 = 0$$
$$v = ??$$
$$a = 3{,}8\times10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$t = ?$$

$$v^2 = \underbrace{v_0^2}_{=0} + 2a\left(x - \underbrace{x_0}_{=0}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ax}$$

L'impulsion est donc :

$$J = mv = m\sqrt{2ax} = 0{,}0105\ \text{kg}\times\sqrt{2\times3{,}8\times10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times0{,}760\ \text{m}} = 7{,}98\ \frac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

## 8.5 Solution : La balle de baseball retour à la question ▲

$\vec{F}$ = (1 831 $\vec{i}$ +600 $\vec{j}$ ) N

L'impulsion subie par la balle lors du contact avec le bâton est liée à la fois à la force impliquée et aux vitesses initiale et finale de la balle, par les deux définitions de l'impulsion :

$$\vec{J} = \vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{p}$$

Donc

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\left(\vec{v} - \vec{v}_0\right)}{\Delta t}$$

On doit exprimer les vitesses initiale et finale comme des vecteurs pour effectuer le calcul de la force. La vitesse initiale étant horizontale et inverse à l'axe $x$ suggéré, on a $\vec{v}_0 = -41{,}2\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. La vitesse finale étant 30° au-dessus de l'horizontale :

$$\vec{v} = 62{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\times\left(\cos30°\vec{i} + \sin30°\vec{j}\right) = \left(54{,}1\vec{i} + 31{,}3\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

On peut alors procéder au calcul de la force moyenne :

$$\vec{F} = \frac{m\left(\vec{v} - \vec{v}_0\right)}{\Delta t} = \frac{0{,}146\ \text{kg}\times\left(\left(54{,}1\vec{i} + 31{,}3\vec{j}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-41{,}2\vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)}{7{,}6\times10^{-3}\ \text{s}} = \left(1\,831\vec{i} + 000\vec{j}\right)\text{N}$$

1 à 11 12 à 21

## 8.2 LE CENTRE DE MASSE

**8.6** Solution : Centre de masse 1D retour à la question ▲

$x_{CM}$ = 2,33 m

La position en $x$ du centre de masse est donnée par :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

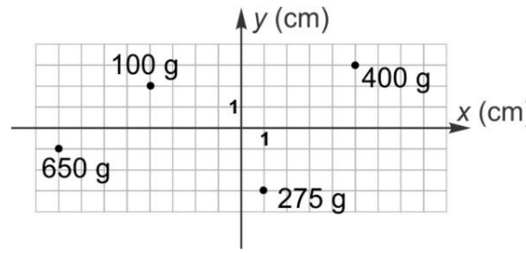
À partir des masses et positions données :

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1\,\text{kg} \times 1\,\text{m} + 2\,\text{kg} \times 2\,\text{m} + 3\,\text{kg} \times 3\,\text{m}}{1\,\text{kg} + 2\,\text{kg} + 3\,\text{kg}} = 2{,}33\,\text{m}$$

**8.7** Solution : Centre de masse 2D retour à la question ▲

$\vec{r}$ = (−2,33 $\vec{i}$ −0,0526 $\vec{j}$ ) cm

On peut calculer séparément les positions du centre de masse en $x$ et en $y$. Selon $x$ d'abord :




$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

En numérotant les masses en fonction de leur cadran dans le référentiel donné :

$$x_{CM} = \frac{400\,\text{g} \times 5\,\text{cm} + 100\,\text{g} \times (-4\,\text{cm}) + 650\,\text{g} \times (-8\,\text{cm}) + 275\,\text{g} \times 1\,\text{cm}}{400\,\text{g} + 100\,\text{g} + 650\,\text{g} + 275\,\text{g}} = -2{,}33\,\text{cm}$$

Et selon $y$ :

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

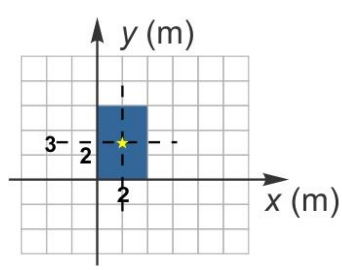
$$y_{CM} = \frac{400\,\text{g} \times 3\,\text{cm} + 100\,\text{g} \times 2\,\text{cm} + 650\,\text{g} \times (-1\,\text{cm}) + 275\,\text{g} \times (-3\,\text{cm})}{400\,\text{g} + 100\,\text{g} + 650\,\text{g} + 275\,\text{g}} = -0{,}0526\,\text{cm}$$

Le vecteur position pour le centre de masse est donc : $\vec{r}$ = (-2,33 $\vec{i}$ -0,0526 $\vec{j}$ ) cm

**8.8** Solution : Centre de masse d'une aire retour à la question ▲

a) $\vec{r}_{CM} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right)\text{m}$

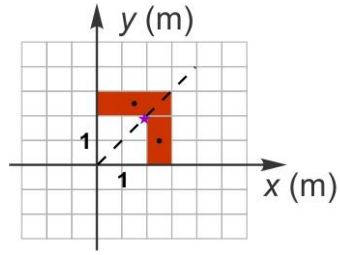
En a), il n'est pas nécessaire de procéder à aucun calcul si on considère la symétrie de la forme entière. La surface étudiée est un rectangle, et le centre de masse se trouve nécessairement au centre de ce rectangle. Le centre de ce rectangle se trouve à $x = 2$ m et $y = 3$ m. Donc $\vec{r}_{CM} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right)\text{m}$




b) $\vec{r}_{CM} = \left(1{,}9\vec{i} + 1{,}9\vec{j}\right)\text{m}$

[1 à 11](#) [12 à 21](#)

La figure présente une symétrie par rapport à une diagonale passant par l'origine (voir figure). On peut donc conclure que les coordonnées $x$ et $y$ du centre de masse auront la même valeur. On peut donc trouver l'une des deux (on trouvera $x_{CM}$) et on posera $x_{CM} = y_{CM}$.

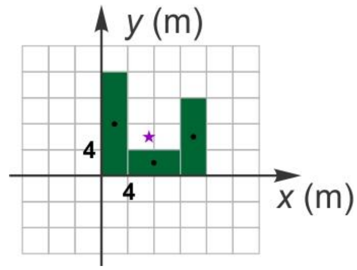



Aussi, pour simplifier les calculs, on peut réduire la forme à deux rectangles, par exemple un rectangle de 15 kg dont le centre se trouve en $x$ = 1,5 m et un rectangle de 10 kg donc le centre se trouve en $x$ = 2,5 m. La position $x$ du centre de masse est :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{15\text{ kg} \times 1{,}5\text{ m} + 10\text{ kg} \times 2{,}5\text{ m}}{15\text{ kg} + 10\text{ kg}} = 1{,}9\text{ m}$$

Vu la symétrie de la figure, on sait que $y_{CM}$ = 1,9 m également, donc $\vec{r}_{CM} = \left(1{,}9\vec{i} + 1{,}9\vec{j}\right)\text{m}$

c) $\vec{r}_{CM} = \left(7{,}33\vec{i} + 6{,}00\vec{j}\right)\text{m}$




Pour simplifier les calculs, on peut réduire la forme à trois rectangles, par exemple un rectangle de 20 kg dont le centre se trouve en $(2\vec{i} + 8\vec{j})$ m, un rectangle de 10 kg dont le centre se trouve en $(8\vec{i} + 2\vec{j})$ m et un rectangle de 15 kg dont le centre se trouve en $(14\vec{i} + 6\vec{j})$ m (voir figure ci-contre). Calculons tour à tour les positions $x$ et $y$ du centre de masse :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{20\text{ kg} \times 2\text{ m} + 10\text{ kg} \times 8\text{ m} + 15\text{ kg} \times 14\text{ m}}{20\text{ kg} + 10\text{ kg} + 15\text{ kg}} = 7{,}33\text{ m}$$

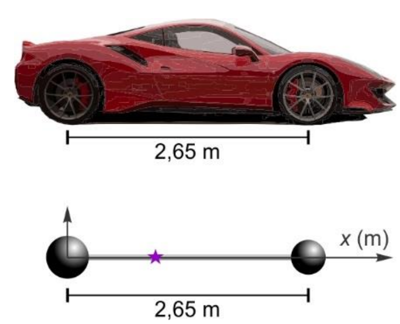
$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{20\text{ kg} \times 8\text{ m} + 10\text{ kg} \times 2\text{ m} + 15\text{ kg} \times 6\text{ m}}{20\text{ kg} + 10\text{ kg} + 15\text{ kg}} = 6{,}00\text{ m}$$

La position du centre de masse est donc $\vec{r}_{CM} = \left(7{,}33\vec{i} + 6{,}00\vec{j}\right)\text{m}$

## **8.9** Solution : La Ferrari Pista

[retour à la question ▲](#)

$d$ = 1,09 m




Sans connaître la masse ($M$), la répartition de la masse de l'automobile, en pourcentage, est la même que si on avait un ensemble de deux masses ponctuelles situées vis-à-vis les roues et dont les masses correspondent à 59% et 41% de la masse combinée (voir figure ci-contre).

On peut donc écrire l'équation de la position du centre de masse pour un système de deux masses dont les masses sont $m_1 = 0{,}59M$ et $m_2 = 0{,}41M$ :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

On peut se limiter au calcul de la position horizontale, car la question ne concerne que la position du centre de masse devant les roues arrière. On peut alors considérer un référentiel qui coïncide avec les roues arrière; la position trouvée sera donc automatiquement la distance du centre de masse devant les roues arrière. Le fait de ne pas connaître la masse n'est pas un obstacle. La variable de la masse inconnue s'annule elle-même et on peut tout de même trouver la position :

$$x_{CM} = \frac{0{,}59M \times 0\text{ m} + 0{,}41M \times 2{,}65\text{ m}}{0{,}59M + 0{,}41M} = 0{,}41 \times 2{,}65\text{ m} = 1{,}09\text{ m}$$

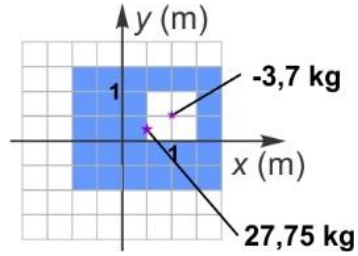
Le centre de masse de la voiture se trouve donc 1,09 m devant les roues arrière.

1 à 11 12 à 21

## 8.10 Solution : Le trou

retour à la question ▲

$\vec{r}_{CM} = (0{,}423\,\vec{i} + 0{,}212\,\vec{j}\,)$ m




Tel que suggéré dans l'énoncé, on peut considérer le trou comme une plaque de masse négative ajoutée à la plaque principale. Le système se réduit donc à un ensemble de deux plaques, et on calculera la position du centre de masse en $x$ et en $y$.

On doit alors calculer la masse totale de la grande surface ainsi que la masse (négative) du trou. Pour la grande surface, centrée en $(0{,}5\,\vec{i} + 0{,}25\,\vec{j}\,)$ m, et dont les dimensions sont 2,5 m par 3,0 m :

$$m_1 = (2{,}5\,\text{m} \times 3{,}0\,\text{m}) \times 3{,}7\,\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 27{,}75\,\text{kg}$$

Pour le trou, un carré de 1 m de côté centré en $(1{,}0\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}\,)$ m :

$$m_2 = -(1{,}0\,\text{m} \times 1{,}0\,\text{m}) \times 3{,}7\,\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^2} = -3{,}7\,\text{kg}$$

La position en $x$ du centre de masse est :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{27{,}75\,\text{kg} \times 0{,}5\,\text{m} + (-3{,}7\,\text{kg}) \times 1{,}0\,\text{m}}{27{,}75\,\text{kg} + (-3{,}7\,\text{kg})} = 0{,}423\,\text{m}$$

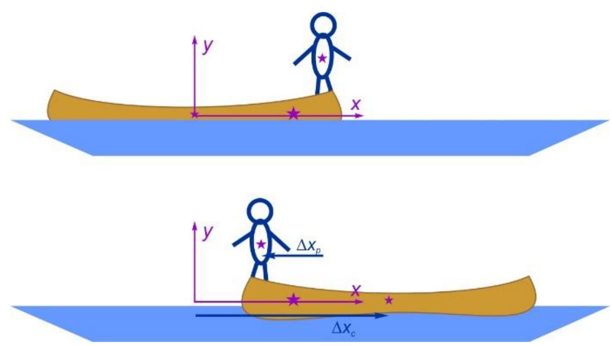
et selon $y$ :

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{27{,}75\,\text{kg} \times 0{,}25\,\text{m} + (-3{,}7\,\text{kg}) \times 0{,}5\,\text{m}}{27{,}75\,\text{kg} + (-3{,}7\,\text{kg})} = 0{,}212\,\text{m}$$

## 8.11 Solution : Le canot

retour à la question ▲

$d$ = 2,8 m vers la gauche




La solution réside dans le fait qu'en l'absence de force extérieure, le centre de masse de l'ensemble personne+canot demeurera immobile. Quand la personne marche dans le canot (vers la gauche selon la figure fournie), elle s'appuie dans le canot de façon à pousser celui-ci vers la droite, ce qui la propulse à gauche. Le centre de masse total demeurera immobile et se trouvera toujours au même endroit après le déplacement du passager.

Pour calculer la position du centre de masse, on doit choisir un référentiel qui demeurera le même tout au long de l'analyse (un référentiel fixe par rapport au sol). Par exemple, plaçons-le vis-à-vis la position initiale du centre de masse du canot. Dans ce référentiel, la personne se trouve initialement à $x_p$ = 2,1 m car elle est à l'extrémité avant du canot (voir figure du haut). La position horizontale du centre de masse total est alors :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_p x_{pi} + m_c x_{ci}}{m_p + m_c} = \frac{62\,\text{kg} \times 2{,}1\,\text{m} + 31\,\text{kg} \times 0\,\text{m}}{62\,\text{kg} + 31\,\text{kg}} = 1{,}4\,\text{m}$$

Après le déplacement, les deux masses ont une nouvelle position, ce qui donne deux inconnues dans l'équation du centre de masse, même si celui-ci est au même endroit. Mais peu importe la position de chacun, on sait que la personne est maintenant 2,1 m à gauche du centre de masse du canot (car elle est à l'autre extrémité). On peut alors écrire deux équations :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_{pf} + m_2 x_{cf}}{m_1 + m_2} = \frac{62\,\text{kg} \times x_{pf} + 31\,\text{kg} \times x_{cf}}{62\,\text{kg} + 31\,\text{kg}} = 1{,}4\,\text{m}$$

$$x_{pf} = x_{cf} - 2{,}1\,\text{m}$$

En substituant $x_{pf}$ dans l'équation principale par « $x_{cf}$ – 2,1 m », on peut alors isoler et calculer $x_{cf}$ :

$$\frac{62\,\text{kg}\times\left(x_{cf}-2{,}1\,\text{m}\right)+31\,\text{kg}\times x_{cf}}{62\,\text{kg}+31\,\text{kg}} = 1{,}4\,\text{m}$$

$$x_{cf} = \frac{1{,}4\,\text{m}\times\left(62\,\text{kg}+31\,\text{kg}\right) + 2{,}1\,\text{m}\times 62\,\text{kg}}{62\,\text{kg}+31\,\text{kg}} = 2{,}8\,\text{m}$$

Le centre de masse du canot s'est donc déplacé de $x_{ci} = 0$ à $x_{cf} = 2{,}8$ m dans notre référentiel. Peu importe le référentiel choisi, le déplacement trouvé aurait été identique, de 2,8 m vers la gauche.

**8.12** Solution : Les deux blocs retour à la question ▲

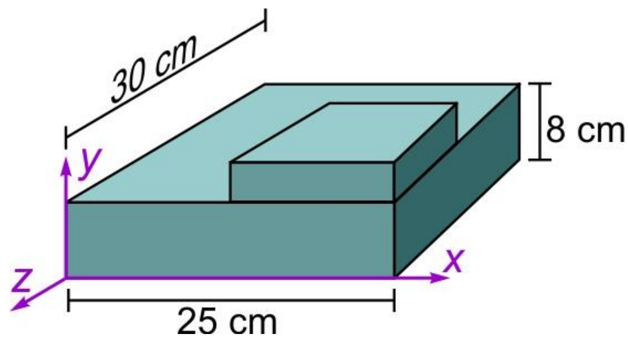
$\vec{r}_{CM} = \left(13{,}2\vec{i} + 4{,}67\vec{j} - 14{,}2\vec{k}\right)\text{cm}$

On doit déterminer dans les 3 dimensions la position du centre de masse des deux blocs réunis. Puisqu'ils ont une forme régulière, on sait que chaque bloc a un centre de masse situé en son centre géométrique. Pour le bloc du dessous :

$$\vec{r}_{CM1} = \left(12{,}5\vec{i} + 4\vec{j} - 15\vec{k}\right)\text{cm}$$

Pour le bloc du dessus, deux fois plus petit :

$$\vec{r}_{CM2} = \left(18{,}75\vec{i} + 10\vec{j} - 7{,}5\vec{k}\right)\text{cm}$$




On doit aussi exprimer la masse de chaque bloc avant de procéder au calcul de la position du centre de masse total, la masse étant donnée par le produit du volume ($V$) et de la masse volumique ($\rho$). Pour le gros bloc (#1) et le petit bloc (#2) :

$$m_1 = V_1 \times \rho \qquad m_2 = V_2 \times \rho$$

Les volumes sont :

$$V_1 = 25\,\text{cm}\times 8\,\text{cm}\times 30\,\text{cm} = 6000\,\text{cm}^3$$

$$V_2 = 12{,}5\,\text{cm}\times 4\,\text{cm}\times 15\,\text{cm} = 750\,\text{cm}^3$$

Il n'est pas nécessaire de procéder au calcul concret des masses, car certains termes vont se simplifier dans le calcul de la position du centre de masse. Selon $x$ :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_{CM1} + m_2 x_{CM2}}{m_1 + m_2} = \frac{V_1\rho x_{CM1} + V_2\rho x_{CM2}}{V_1\rho + V_2\rho} = \frac{V_1 x_{CM1} + V_2 x_{CM2}}{V_1 + V_2}$$

On constate alors que le calcul de la position du centre de masse peut ne considérer que le volume et les positions.

$$x_{CM} = \frac{V_1 x_{CM1} + V_2 x_{CM2}}{V_1 + V_2} = \frac{6000\,\text{cm}^3\times 12{,}5\,\text{cm} + 750\,\text{cm}^3\times 18{,}75\,\text{cm}}{6000\,\text{cm}^3 + 750\,\text{cm}^3} = 13{,}2\,\text{cm}$$

En $y$ et en $z$, on aura alors :

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{V_1 y_{CM1} + V_2 y_{CM2}}{V_1 + V_2} = \frac{6000\,\text{cm}^3\times 4\,\text{cm} + 750\,\text{cm}^3\times 10\,\text{cm}}{6000\,\text{cm}^3 + 750\,\text{cm}^3} = 4{,}67\,\text{cm}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M} = \frac{V_1 z_{CM1} + V_2 z_{CM2}}{V_1 + V_2} = \frac{6000\,\text{cm}^3\times\left(-15\,\text{cm}\right) + 750\,\text{cm}^3\times\left(-7{,}5\,\text{cm}\right)}{6000\,\text{cm}^3 + 750\,\text{cm}^3} = -14{,}2\,\text{cm}$$

La position du centre de masse combiné est donc $\vec{r}_{CM} = \left(13{,}2\vec{i} + 4{,}67\vec{j} - 14{,}2\vec{k}\right)\text{cm}$

1 à 11 12 à 21

## 8.3 LA CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

**8.13** Solution : Yosemite Sam retour à la question ▲

$v$ = 15,3 m/s

La quantité de mouvement est conservée lors du lancer du boulet de canon. Si tout est immobile avant le tir, la quantité de mouvement du système (bateau entier et boulet) est nulle. Elle devra donc être nulle après le tir également. Le boulet, lancé vers la droite, aura une quantité de mouvement positive si on considère un axe horizontal dirigé vers la droite. Le bateau et son contenu devrait donc être propulsé vers la gauche par le tir. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement entraîne :

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$$

On peut développer chaque terme selon la dimension horizontale seulement, en considérant que le boulet de canon est la masse $m_1$ et le bateau est la masse $m_2$ :

$$m_1 \underbrace{u_1}_{=0} + m_2 \underbrace{u_2}_{=0} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

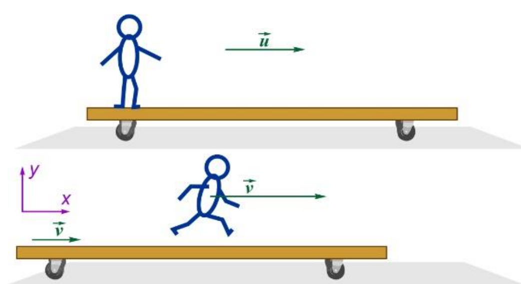
La seule inconnue est la vitesse du bateau après le tir :

$$v_2 = \frac{-m_1 v_1}{m_2} = \frac{-17\,\mathrm{kg} \times 230\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{255\,\mathrm{kg}} = -15,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Comme on demande la module de la vitesse de recul du bateau, la réponse est 15,3 m/s.

**8.14** Solution : La plate-forme retour à la question ▲

$v$ = 6,21 m/s




La quantité de mouvement du système se conserve lors de toute interaction où le système ne subit pas de force extérieure. La personne et la plate-forme vont à la même vitesse à un certain moment et la personne se met alors à courir vers l'avant de la plate-forme (vers la droite sur la figure ci-contre). La personne augmente donc sa quantité de mouvement en se propulsant vers la droite, et fait ainsi ralentir la plate-forme en la poussant vers la gauche. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement est :

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$$

On peut développer chaque terme selon la dimension horizontale seulement, en considérant que la personne ($m_1$) et la plate-forme ($m_2$) ont la même vitesse initiale ($u_1 = u_2 = u$) :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$(m_1 + m_2) u = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Les deux vitesses finales sont inconnues, mais on sait que la personne cours à 7,5 m/s par rapport à la plate-forme, ce qui nous indique que la vitesse réelle (par rapport au sol) de la personne ($v_1$) est plus élevée que celle de la plate-forme ($v_2$) de 7,5 m/s :

$$v_1 = v_2 + 7,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

On peut donc substituer $v_1$ dans l'équation principale par cette dernière expression

$$(m_1 + m_2) u = m_1 \left( v_2 + 7,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right) + m_2 v_2$$

$v_2$ est alors la seule inconnue, qu'on peut isoler et calculer :

$$(m_1 + m_2) u = (m_1 + m_2) v_2 + m_1 \times \left( 7,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right)$$

$$v_2 = \frac{(m_1+m_2)u - m_1\times\left(7{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(m_1+m_2)} = u - \frac{m_1\times\left(7{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(m_1+m_2)}$$

$$v_2 = u - \frac{m_1\times\left(7{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(m_1+m_2)} = 8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{55\,\text{kg}\times\left(7{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(55\,\text{kg}+175\,\text{kg})} = 6{,}21\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

**8.15** Solution : Molécule en skate retour à la question ▲

$v$ = 6,39 m/s

Lorsque Molécule atterrit sur la planche à roulettes, il partage sa quantité de mouvement avec la planche. La quantité de mouvement est conservée. Selon l'équation de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$$

On développe chaque terme selon la dimension horizontale seulement, en considérant que la planche à roulette (posons $m_2$) est initialement immobile :

$$m_1u_1 + m_2\underbrace{u_2}_{=0} = m_1v_1 + m_2v_2$$

Après l'arrivée de Molécule sur la planche, les deux vitesses finales sont identiques, donc $v_1 = v_2 = v$ :

$$m_1u_1 = (m_1+m_2)v$$

$$v = \frac{m_1u_1}{m_1+m_2} = \frac{3{,}8\,\text{kg}\times 9{,}25\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}8\,\text{kg}+1{,}7\,\text{kg}} = 6{,}39\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

**8.16** Solution : L'explosion retour à la question ▲

$v$ = 19,8 m/s, $\theta_3$ = 91,9°

La quantité de mouvement totale doit être conservée de part et d'autre de l'explosion même s'il y a 3 masses, et ce dans chacune des dimensions. La masse étant initialement immobile, il n'y a aucune quantité de mouvement initiale. Après l'explosion, la quantité de mouvement se partage dans les 3 masses. On peut donc écrire :

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$$

$$0 = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + m_3v_{3x} \qquad (1)$$

$$0 = m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + m_3v_{3y} \qquad (2)$$

Les inconnues dans ces deux équations sont $v_{3x}$ et $v_{3y}$, avec lesquelles on pourra calculer le module de la vitesse $v_3$ ainsi que son orientation. On doit exprimer en fonction des modules et orientations les composantes des vitesses connues. En isolant les composantes de vitesse inconnues, les équations (1) et (2) deviennent :

$$v_{3x} = \frac{-m_1v_1\cos\theta_1 - m_2v_2\cos\theta_2}{m_3} \qquad (3)$$

$$v_{3y} = \frac{-m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2}{m_3} \qquad (4)$$

La masse du 3$^{\text{e}}$ fragment est de 1,5 kg car les deux premiers fragments ont une masse combinée de 5,5 kg. On peut alors procéder aux calculs :

$$v_{3x} = \frac{-2{,}5\,\text{kg}\times 7\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\times\cos 215° - 3\,\text{kg}\times 8{,}3\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\times\cos 308°}{1{,}5\,\text{kg}} = -0{,}663\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{3y} = \frac{-2{,}5\,\text{kg}\times 7\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\times\sin 215° - 3\,\text{kg}\times 8{,}3\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\times\sin 308°}{1{,}5\,\text{kg}} = 19{,}8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

1 à 11 12 à 21

Le module de la vitesse $v_3$ est :

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{\left(-0{,}663\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(19{,}8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 19{,}8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Quant à l'orientation, on peut s'attendre à ce que le 3^e^ fragment soit projeté vers le haut, pour compenser le fait que les deux premiers fragments soient éjectés vers le bas ($y$ négatif)

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \tan^{-1}\frac{19{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-0{,}663\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = -88{,}1°$$

L'orientation de -88,1° n'est pas cohérente avec une direction vers le haut. On doit donc corriger l'angle trouvé en ajoutant 180° pour obtenir la seconde solution de la fonction arc tangente :

$$\theta_3 = -88{,}1° + 180° = 91{,}9°$$

La vitesse du 3^e^ fragment est donc de 19,8 m/s, à $\theta_3$ = 91,9°.

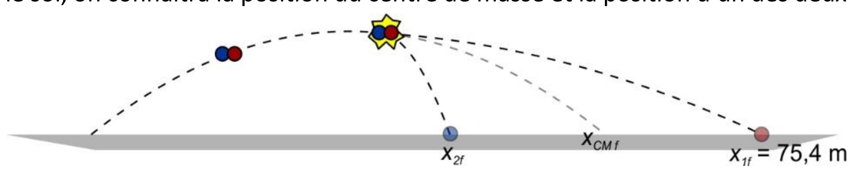
## **8.17** Solution : Le lancer double

retour à la question ▲

$d$ = 40,3 m

La solution réside dans le fait que malgré l'explosion du projectile (et sa séparation en deux projectiles), le centre de masse suit la même trajectoire qu'un projectile régulier. Cela est dû au fait qu'en l'absence de force extérieure, le centre de masse a une vitesse constante, ou continue de se déplacer en accord avec la force gravitationnelle sur l'ensemble des masses du système, donc suit la même parabole. On peut donc calculer à partir des conditions du lancer le point d'atterrissage du centre de masse, qui serait le point d'atterrissage d'un projectile régulier qui n'aurait pas explosé.

Au moment où les deux fragments touchent le sol, on connaîtra la position du centre de masse et la position d'un des deux fragments. On pourra alors calculer la position du 2^e^ fragment en utilisant l'équation de la position du centre de masse. La figure ci-contre montre un aperçu du mouvement du projectile, de son centre de masse et des deux fragments après l'explosion.




Calculons donc pour commencer le point d'atterrissage du centre de masse, par traitement de la cinématique (à deux dimensions). Les paramètres et équations sont :

$$x_{CM0} = 0 \qquad y_{CM0} = 0$$
$$x_{CM} = ?? \qquad y_{CM} = 0$$
$$v_{CMx0} = 25{,}6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30° = 22{,}2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \qquad v_{CMy0} = 25{,}6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \times \sin 30° = 12{,}8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v_{CMx} = v_{x0} \qquad v_{CMy} = ?$$
$$a_{CMx} = 0 \qquad a_{CMy} = -9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$t = ?$$

$$x_{CM} = \underset{=0}{x_{CM0}} + v_{CMx0}t \qquad \overset{=0}{y_{CM}} = \overset{=0}{y_{CM0}} + v_{CMy0}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$v_{CMy} = v_{CMy0} - gt$$

En réunissant les deux équations de position :

$$t = \frac{x_{CM}}{v_{CMx0}} \qquad 0 = v_{CMy0} - \tfrac{1}{2}gt$$

$$0 = v_{CMy0} - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{CMx0}}\right)$$

$$x = \frac{2v_{CMy0}v_{CMx0}}{g} = \frac{2 \times v_{CM0}\cos\theta \times v_{CM0}\sin\theta}{g} = \frac{v_{CM0}^2 \times 2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

On peut calculer $x$ avec cette expression, mais à titre informatif, on peut la simplifier encore avec l'identité trigonométrique « $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$ ». Le résultat est la position finale du centre de masse, $x_{CM\,f}$ :

1 à 11     12 à 21

$$x = \frac{v_{CM0}^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{\left(25{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \times \sin(2\times 30°)}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 57{,}9\ \text{m}$$

On traite alors la position du centre de masse, exprimée en fonction des deux masses identiques ($m_1 = m_2 = m$) :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m x_1 + m x_2}{m + m} = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Si on considère que la masse dont la position d'atterrissage est connue est $m_1$ ($x_1$ = 75,4 m), on peut isoler et calculer $x_2$ :

$$x_2 = 2x_{CM} - x_1 = 2\times 57{,}9\ \text{m} - 75{,}4\ \text{m} = 40{,}3\ \text{m}$$

Le 2e fragment atterrit donc à 40,3 m du point de lancement.

---

## 8.4 LES COLLISIONS

**8.18** Solution : Le train retour à la question ▲

$v$ = 3,34 m/s

Puisque le wagon sera lié au train après contact (et se déplacera à la même vitesse), on peut considérer qu'il s'agit d'une collision inélastique. Il y a donc conservation de la quantité de mouvement dans la dimension du mouvement (posons $x$). En nommant $m_1$ la masse du train et $m_2$ la masse du wagon seul :

$$m_1 u_{1x} + m_2 \underbrace{u_{2x}}_{=0} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

Les vitesses finales sont identiques : $v_{1x} = v_{2x} = v$ . En considérant positive la vitesse initiale du train :

$$m_1 u_{1x} = m_1 v + m_2 v$$

$$v = \frac{m_1 u_{1x}}{m_1 + m_2} = \frac{945\ \text{t} \times 3{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{945\ \text{t} + 45\ \text{t}} = 3{,}34\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**8.19** Solution : L'accident retour à la question ▲

a) $\vec{J}$ = $(-18{,}2\,\vec{i} - 7{,}36\,\vec{j}\,)\times 10^3$ kg·m/s

On cherche le vecteur impulsion que subit la voiture de masse $m_1$. On cherche donc la variation de quantité de mouvement de $m_1$ car :

$$\vec{J}_1 = \Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} = m_1\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}\right)$$

Remarquons que la masse 1 qui dévie de 58° aura une vitesse finale orientée à 148° dans le référentiel suggéré.
Les vitesses initiale et finale de la masse $m_1$ sont connues; on peut donc procéder au calcul de l'impulsion (sans convertir les unités pour l'instant) :

$$\vec{J}_1 = m_1\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}\right) = 1\,350\ \text{kg} \times \left[\left(57{,}3\ \tfrac{\text{km}}{\text{h}}\left(\cos 148°\vec{i} + \sin 148°\vec{j}\right)\right) - \left(50{,}0\ \tfrac{\text{km}}{\text{h}}\vec{j}\right)\right] = \left(-65{,}6\vec{i} - 26{,}5\vec{j}\right)\times 10^3\ \tfrac{\text{kg}\times\text{km}}{\text{h}}$$

Pour exprimer l'impulsion dans des unités plus conventionnelles, convertissons les kilomètres et heures en mètres et en secondes :

$$\vec{J}_1 = \left(-65{,}6\vec{i} - 26{,}5\vec{j}\right)\times 10^3\ \tfrac{\text{kg}\times\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\ \frac{\text{km}}{h}} = \left(-18{,}2\vec{i} - 7{,}36\vec{j}\right)\times 10^3\ \tfrac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$$

b) Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'applique à l'ensemble des masses d'un système. Chacune des masses du système peut cependant subir une variation de quantité de mouvement. Ici, puisque deux masses sont impliquées dans la collision, c'est la quantité de mouvement totale des deux masses qui est conservée. La variation de quantité de mouvement de la masse $m_1$ est inverse à la variation de quantité de mouvement de la masse $m_2$.

1 à 11 12 à 21

c) $\vec{J}$ = (18,2 $\vec{i}$ +7,36 $\vec{j}$ )×10³ kg·m/s

Pour calculer l'impulsion subie par la seconde voiture, on pourrait procéder comme en a) pour la voiture 1. Il faudrait alors connaître les composantes de vitesse finale de la voiture $m_2$, ce qui doit être fait en c). Cependant, si on considère les deux voitures comme un système isolé (on nous dit de négliger le frottement au sol durant le contact), on sait que les impulsions subies par les deux voitures seront de même grandeur, et de sens opposés. Il suffit donc d'inverser les signes des deux composantes de l'impulsion trouvée en a) :

$$\vec{J}_2 = -\vec{J}_2 \quad = \quad -\left[\left(-18{,}2\vec{i} - 7{,}36\vec{j}\right)\times 10^3\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}\right] \quad = \quad \left(18{,}2\vec{i} + 7{,}36\vec{j}\right)\times 10^3\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}$$

d) $\vec{v}_2 = \left(-11{,}6\vec{i} + 15{,}5\vec{j}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}}$

On doit ici traiter les équations liées à la collision qui survient. Identifions d'abord le type de collision. Les voitures ne restent pas liées après le contact; il ne s'agit donc pas d'une collision inélastique. Par ailleurs, le rebond des voitures n'est pas parfait, ce qui se démontre bien avec le fait que la déformation des voitures demeure. Il s'agit donc d'une collision partiellement élastique. Seule la conservation de la quantité de mouvement peut s'appliquer, dans chacune des dimensions *x* et *y*. Les équations de cette conservation de la quantité de mouvement sont :

$$m_1 \underbrace{u_{1x}}_{=0} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \qquad \text{avec } u_{2x} = \text{-50 km/h}$$

$$m_1 u_{1y} + m_2 \underbrace{u_{2y}}_{=0} = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \qquad \text{avec } u_{1y} = \text{+50 km/h}$$

On ignore les 4 composantes de vitesses finales, mais on peut exprimer en fonction des module et orientation les composantes $v_{1x}$ et $v_{1y}$ (car $v_1$ = 57,3 km/h et $\theta_1$ = 148°) :

$$0 + m_2 u_{2x} = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_{2x} \qquad (1)$$

$$m_1 u_{1y} + 0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_{2y} \qquad (2)$$

Les composantes de vitesse finale de la seconde voiture peuvent alors être isolées et calculées. En *x* d'abord, via l'équation (1) :

$$v_{2x} = \frac{m_2 u_{2x} - m_1 v_1 \cos\theta_1}{m_2}$$

$$v_{2x} = \frac{1\,710\text{ kg}\times\left(-50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) - 1\,350\text{ kg}\times 57{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\times\cos 148°}{1\,710\text{ kg}} = -11{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Et selon *y*, via l'équation (2) :

$$v_{2y} = \frac{m_1 u_{1y} - m_1 v_1 \sin\theta_1}{m_2}$$

$$v_{2y} = \frac{1\,350\text{ kg}\times\left(50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) - 1\,350\text{ kg}\times 57{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\times\sin 148°}{1\,710\text{ kg}} = 15{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

La vitesse finale de la voiture de masse $m_2$ est donc $\vec{v}_2 = \left(-11{,}6\vec{i} + 15{,}5\vec{j}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}}$

**8.20** Solution : Collision de boules retour à la question ▲

a) $u_2$ = 0,517 m/s

La collision est élastique elle se produit sur une seule dimension car les deux vitesses initiales et l'une des vitesses finales se trouvent sur le même axe (vitesses colinéaires). La seconde vitesse finale se trouve donc forcément sur le même axe également.

Pour une collision élastique 1D, il y a conservation de la quantité de mouvement le long de cet axe :

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \qquad (1)$$

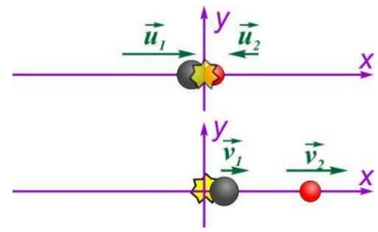
Selon les axes fournis dans l'énoncé, on a $u_{1x}$ = 4,5 m/s et $v_{1x}$ = +0,2 m/s.

On ignore alors les deux vitesses liées à $m_2$. On peut cependant utiliser l'équation des vitesses relatives, puisque la collision est élastique en 1D :

1 à 11 12 à 21

$$v_{2x} - v_{1x} = -\left(u_{2x} - u_{1x}\right) \qquad (2)$$

Puisqu'on cherche $u_{2x}$, isolons d'abord $v_{2x}$ dans l'équation (2) pour la substituer dans l'équation (1) :




$$v_{2x} = v_{1x} + u_{1x} - u_{2x}$$

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 \left(v_{1x} + u_{1x} - u_{2x}\right)$$

On peut alors isoler $u_{2x}$ pour calculer la vitesse initiale de $m_2$ :

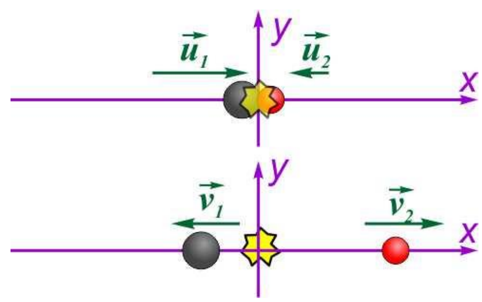
$$u_{2x} = \frac{\left(m_1 + m_2\right) v_{1x} + \left(m_2 - m_1\right) u_{1x}}{2 m_2} \qquad (3)$$

$$u_{2x} = \frac{\left(600\text{ g} + 450\text{ g}\right) \times \left(+0{,}2\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right) + \left(450\text{ g} - 600\text{ g}\right) \times \left(4{,}5\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{2 \times 450\text{ g}} = -0{,}517\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Cette vitesse étant négative, on confirme que la vitesse initiale de la seconde masse est dirigée vers la gauche (axe *x* négatif). Mais le module de cette vitesse est 0,517 m/s.

b) $u_2$ = 2,15 m/s

L'équation (3) développée en a) a été obtenue sans tenir compte des valeurs et signes des vitesses impliquées. Elle est donc encore valide si on considère une autre valeur de vitesse finale pour la masse $m_1$. Avec $u_{1x} = -1{,}2$ m/s :



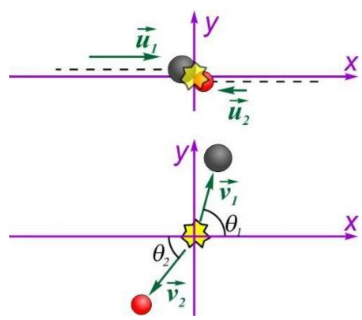

$$u_{2x} = \frac{\left(m_1 + m_2\right) v_{1x} + \left(m_2 - m_1\right) u_{1x}}{2 m_2}$$

$$u_{2x} = \frac{\left(600\text{ g} + 450\text{ g}\right) \times \left(-1{,}2\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right) + \left(450\text{ g} - 600\text{ g}\right) \times \left(4{,}5\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{2 \times 450\text{ g}} = -2{,}15\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Le module de la vitesse initiale de la boule de masse $m_2$ est 2,15 m/s.

c) $u_2$ = 8,93 m/s

Si la boule #1 dévie de 72°, la collision n'est plus confinée à une dimension, et se déroule donc en 2 dimensions. Posons que cette déviation pour $m_1$ se fait vers *y* positif (les trajectoires initiales des deux masses pourraient être décalées légèrement, mais demeurent parallèles à l'axe *x*). On applique l'équation de la conservation de la quantité de mouvement selon les deux dimensions, et on exprimera les composantes des vitesses finales en fonction des modules et orientations :




$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \quad \rightarrow \quad m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$

$$m_1 \underbrace{u_{1y}}_{=0} + m_2 \underbrace{u_{2y}}_{=0} = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \quad \rightarrow \quad 0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2$$

Pour la masse $m_1$, l'angle de 72° est directement mesuré à partir de l'axe *x* positif. Pour $m_2$, l'angle de 50° par rapport à l'axe *x* négatif implique deux composantes négatives. On peut alors ajouter nous-même un signe « − » aux composantes de $v_2$. Les équations deviennent alors :

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_1 \cos 72° - m_2 v_2 \cos 50° \qquad (4)$$

$$0 = m_1 v_1 \sin 72° - m_2 v_2 \sin 50° \qquad (5)$$

Dans ces deux équations, les inconnues sont $v_2$ et $u_{2x}$. Comme on cherche $u_{2x}$, isolons $v_2$ dans l'équation (5) et substituons $v_2$ dans l'équation (4) :

$$(5) \qquad v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin 72°}{m_2 \sin 50°}$$

1 à 11 12 à 21

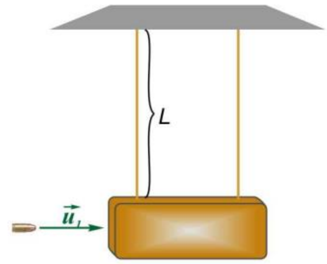
(4) $$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_1 \cos 72° - m_2 \left( \frac{m_1 v_1 \sin 72°}{m_2 \sin 50°} \right) \cos 50°$$

$$u_{2x} = \frac{m_1}{m_2} \left( v_1 \left( \cos 72° - \frac{\sin 72° \times \cos 50°}{\sin 50°} \right) - u_{1x} \right)$$

$$u_{2x} = \frac{600\text{ g}}{450\text{ g}} \left( 4{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \times \left( \cos 72° - \frac{\sin 72° \times \cos 50°}{\sin 50°} \right) - 4{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \right) = -8{,}93\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Le module de la vitesse initiale de la boule de masse $m_2$ est 8,93 m/s.

**8.21** Solution : Le pendule balistique retour à la question ▲

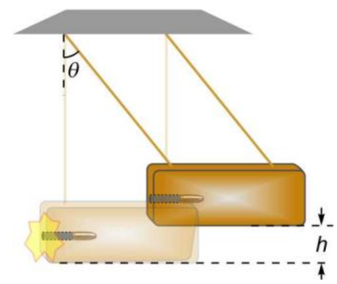



a) Une collision inélastique

Puisque la balle de fusil s'incruste dans le bloc et ne le traverse pas, elle se déplacera parfaitement avec lui après l'impact. Lorsque les deux vitesses finales sont identiques, la collision est nécessairement parfaitement inélastique.

b) $u_1$ = 379 m/s

Le phénomène se déroule en deux phase. La première phase est une collision inélastique 1D (puisque la balle de fusil s'incruste dans le bloc et se déplace ensuite avec lui) dont la vitesse finale commune devient la vitesse initiale de la seconde phase. La seconde phase est celle du pendule qui transforme son énergie cinétique en énergie potentielle gravitationnelle en s'élevant.




La collision inélastique qui survient lorsque la balle ($m_1$) frappe le bloc ($m_2$) se déroule en une seule dimension, car le mouvement du pendule (qui est alors vertical) est tangentiel, donc horizontal exclusivement. L'équation applicable pour cette collision inélastique 1D où les vitesses finales sont identiques est :

$$m_1 u_{1x} + \underbrace{m_2 u_{2x}}_{=0} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) v \qquad (1)$$

Dans cette équation, on cherche $u_1$, mais on ignore également la vitesse finale $v$. On doit traiter la phase d'élévation du pendule pour déduire cette vitesse à partir de la hauteur maximale d'élévation du pendule, par conservation de l'énergie. L'équation de la conservation de l'énergie est :

$$E_f = E_i + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

Le travail des forces non conservatives est nul car il n'y a aucune force non conservative lors de l'élévation du pendule. À la fin de l'élévation, l'énergie cinétique est nulle, alors qu'au début, il n'y a que de l'énergie cinétique si on considère que son niveau le plus bas est la hauteur $y$ = 0 :

$$\underbrace{K_f}_{=0} + U_{gf} = K_i + \underbrace{U_{gi}}_{=0} + 0$$

La masse qui s'élève lors de cette phase est la masse combinée de la balle et du bloc, donc ($m_1 + m_2$). Si on développe chaque terme :

$$(m_1 + m_2) g y_f = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_i^2$$

La vitesse $v_i$ de la dernière équation est la vitesse $v$ de l'équation (1). On peut par ailleurs rayer les masses puisqu'elles sont identiques des deux côtés de l'équation. On a alors :

$$gh = \tfrac{1}{2} v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

En réunissant les équations (1) et (2) :

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) \times \sqrt{2gh}$$

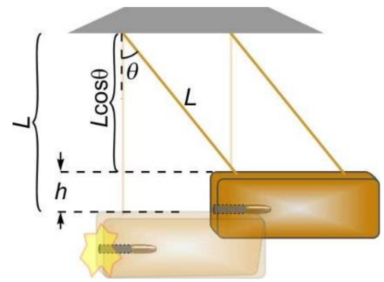
1 à 11 12 à 21

On peut alors isoler la vitesse $u_1$ et la calculer pour connaître la vitesse à laquelle la balle de fusil a frappé le bloc :

$$u_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh} \quad = \quad \frac{0{,}0095\,\text{kg} + 2{,}50\,\text{kg}}{0{,}0095\,\text{kg}} \times \sqrt{2 \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}105\,\text{m}} \quad = \quad 379\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) $\theta$ = 37,8°

Sur la figure ci-contre, on voit un triangle rectangle formé par les différentes positions des cordes et l'horizontale. La hauteur $h$ est la différence entre la longueur de la corde ($L$) et la composante verticale de la corde lorsqu'elle est inclinée ($L\cos\theta$). Donc :




$$h = L - L\cos\theta \quad = \quad L(1 - \cos\theta)$$

Si on veut calculer l'inclinaison des cordes :

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{h}{L}\right) \quad = \quad \cos^{-1}\left(1 - \frac{0{,}105\,\text{m}}{0{,}500\,\text{m}}\right) \quad = \quad 37{,}8°$$