Équations Sect 3.1, #1 à 12 Sect 3.2, #13 à 15 Sect 3.3, #16 à 20

CH 3 LES VECTEURS

ÉQUATIONS LIÉES AU CHAPITRE :

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= x_2 - x_1 = A\cos\theta_A \\ A_y &= y_2 - y_1 = A\sin\theta_A \end{aligned}}$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)}$$

Pour le produit scalaire (à partir du chapitre 7) :

$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta_{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

3.1 PROPRIÉTÉS DES VECTEURS

3.1 Exercice : Composantes d'un vecteur solution ►

Calculez les composantes des vecteurs suivants :

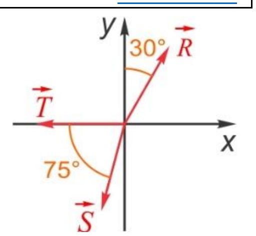
a) Un vecteur $\vec{B}$ a un module de 4,45 m et une orientation de 26° dans le plan *xy*.
b) Un vecteur $\vec{F}$ a un module de 550 N et est orienté dans le 2e cadran à 20° de l'axe *y*.
c) Un vecteur $\vec{Z}$ mesure 90,0 cm et est orienté à 20° sous la portion négative de l'axe *x*.

3.2 Exercice : Solutions doubles

Essayez ces exercices en ligne pour vérifier si vous maîtrisez l'identification et l'évaluation des orientations et angles entre vecteurs.

3.3 Exercice : Vecteurs illustrés solution ►

Les trois vecteurs de la figure ci-contre ont un module de 20 cm. Indiquez :



a) L'orientation du vecteur $\vec{R}$;
b) Les composantes du vecteur $\vec{S}$;
c) Le plus petit angle entre $\vec{R}$ et $\vec{S}$;
d) Exprimez le vecteur $\vec{T}$ en coordonnées polaires.

3.4 Exercice : La bonne tangente solution ►

Pour chacun des vecteurs suivants, déterminez son module et son orientation par rapport à x^+.

a) $\vec{A}$ = (3,75, 7,00) m
b) $\vec{B}$ = (–4, –2) m
c) C_y = 25,0 m/s et C_x = –40,0 m/s
d) D_x = –2,50 m et D_y = 0 m
e) $|\vec{E}|$ = 100 N, E_x = 80 N et $E_y < 0$

3.5 Exercice : Angle entre V et W solution ►

Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont définis respectivement par (5,25, –4,10) m et (–7,00, –1,50) m. Déterminez le plus petit angle qu'ils font entre eux.

3.6 Exercice : Déplacement quelconque solution ►

Un déplacement amène un objet de *x* = 25,2 m à *x* = 14,0 m, et de *y* = 36,8 m à *y* = 29,8 m. Quels sont les module et orientation de ce déplacement?

3.7 Exercice : Trois vecteurs solution ►

Soit les trois vecteurs suivants :

$\vec{A}$ = (4,20, –4,20) m;
$\vec{B}$ = (4,50, 3,90) m;
$\vec{C}$ = (–4,35, 4,05) m.

a) Lequel de ces vecteurs a le module le plus grand?
b) Dans quel cadran est orienté chacun de ces vecteurs?

3.8 Question : Angles et vecteurs

Essayez ces exercices en ligne pour vérifier si vous maîtrisez l'identification et l'évaluation des orientations et angles entre vecteurs.

3.9 Exercice : i-j-k solution ►

Exprimez les vecteurs suivants en fonction des vecteurs unitaires :

a) (2,50 m, 3,30 m);
b) A_x = 45,2 N, A_y = 27,1 N;
c) (13,5 cm, 205°);
d) R_x = 25 m/s, R_y = 19 m/s, R_z = 12 m/s.

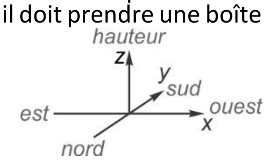
3.10 Exercice : Modules solution ►

Donnez le module des vecteurs suivants :

a) $\vec{A} = (13{,}0\vec{\imath} + 2{,}4\vec{\jmath})$
b) $\vec{R} = 5{,}2\vec{\imath}$ m
c) $\vec{B} = \left(1{,}5\vec{\imath} - 2{,}4\vec{\jmath} + 4{,}1\vec{k}\right)$ cm

3.11 Exercice : The shipping robot solution ►

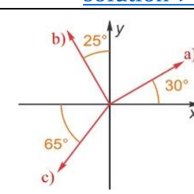
Un robot destiné à déplacer des marchandises dans un entrepôt gère sa position à partir d'un certain point et compte sa distance parcourue dans l'axe est-ouest, dans l'axe nord-sud, ainsi que le soulèvement de sa plate-forme. Pour l'expédition d'un certain colis, il doit prendre une boîte se trouvant à 23,5 m ouest, à 13,5 m nord et 2,3 m au-dessus du sol, pour la placer sur un chariot d'expédition à 19,5 m est, 8 m sud et 0,9 m de hauteur. La programmation utilise des axes tel qu'illustré ci-contre.



a) Quel est le déplacement de la boîte, exprimé en fonction des vecteurs unitaires?
b) Quel est le module de ce déplacement?

3.12 Exercice : i et j solution ►

Le graphique ci-contre illustre 3 vecteurs dont les modules sont tous de 20 cm. Exprimez chacun de ces vecteurs en fonction des vecteurs unitaires fondamentaux.



3.1- a) (4,00, 1,95) m — b) (–188, 517) N — c) (–84,6, –30,8) cm — **3.2** — **3.3**- a) 60° — b) (–5,17, –19,3) cm — c) 165° — d) (20,0 cm, 180°)
3.4- a) (7,94 m, 61,8°) — b) (4,47 m, 207°) — c) (47,2 m/s, 148°) — d) (2,50 m, 180°) — e) (100 N, 323°) — **3.5**- 130° — **3.6**- Δr = 13,2 m, θ = 212°
3.7- a) $\vec{B}$ — b) $\vec{A}$: 4, $\vec{B}$: 1, $\vec{C}$: 2 — **3.8** — **3.9**- a) $(2{,}50\vec{\imath} + 3{,}30\vec{\jmath})$ m — b) $(45{,}2\vec{\imath} + 27{,}1\vec{\jmath})$ N — c) $(-12{,}2\vec{\imath} - 5{,}70\vec{\jmath})$ cm — d) $\left(25\vec{\imath} + 19\vec{\jmath} + 12\vec{k}\right)\frac{m}{s}$
3.10- a) 13,2 — b) 5,2 m — c) 4,98 cm — **3.11**- a) $\left(-43{,}0\vec{\imath} + 21{,}5\vec{\jmath} - 1{,}4\vec{k}\right)$ m — b) 48,1 m
3.12- a) $(17{,}3\vec{\imath} + 10{,}0\vec{\jmath})$ cm — b) $(-8{,}45\vec{\imath} + 18{,}1\vec{\jmath})$ cm — c) $(-8{,}45\vec{\imath} - 18{,}1\vec{\jmath})$ cm

3.2 OPÉRATIONS ET ALGÈBRE VECORIELLE

3.13 Exercice : Opérations solution ►

Effectuez les opérations indiquées et exprimez le résultat en fonction des vecteurs unitaires :

a) $(4,\ 5,\ 7)\ \text{m}\ +\ (13,\ 0,\ 9)\ \text{cm}$
b) $\left(2{,}5\vec{\jmath}+3\vec{k}+9\vec{\imath}\right)-\left(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$
c) $2\times\left(2\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-\vec{k}\right)+\left(-2\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$
d) $4{,}5\times(4\ \text{m};\ \ 45°)+(45\vec{\imath})\ \text{m}$

3.14 Exercice : R2D2 solution ►

Soit les déplacements suivants : $\vec{D}_1=(5{,}45\ \text{m},\ 62°)$ et $\vec{D}_2=(2{,}25\vec{\imath}-\vec{\jmath})\ \text{m}$. Un vecteur $\vec{R}$ est défini par $\vec{R}=2\vec{D}_1+4{,}5\vec{D}_2$. Déterminez :

a) R_x;
b) R_y;
c) $\vec{R}$ en fonction des vecteurs unitaires fondamentaux;
d) R;
e) θ_R;
f) $\vec{R}-2\vec{D}_2$.

3.15 Exercice : La promenade solution ►

Soit le vecteur $\vec{X}$ ayant un module de 45 m vers le sud et un vecteur $\vec{Y}$ de 52 m à 25° au nord de l'ouest. Déterminez les modules et orientations des résultats suivants :

a) $\vec{X}+\vec{Y}$
b) $\vec{Y}-\vec{X}$
c) $3\vec{X}-2\vec{Y}$

3.3 LE PRODUIT SCALAIRE

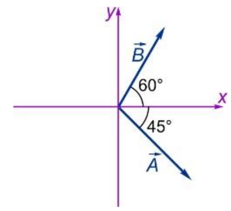
(À l'usage du chapitre 7, faire si vu en classe)

3.16 Exercice : Le produit scalaire I solution ►

Effectuez le produit scalaire des vecteurs $\vec{R}=\left(2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-4\vec{k}\right)\ \text{m}$ et $\vec{S}=\left(-\vec{\imath}+2\vec{k}\right)\ \text{m}$.

3.17 Exercice : Le produit scalaire II solution ►

Les vecteurs sur la figure ci-contre ont tous deux un module de 5 cm. Déterminez leur produit scalaire.



3.18 Exercice : Le produit scalaire III solution ►

Deux vecteurs ayant des modules identiques font un angle de 75° entre eux et leur produit scalaire vaut 42,5. Déterminez leur module.

3.19 Exercice : Le produit scalaire IV solution ►

Soit les vecteurs $\vec{X}=\left(3\vec{\imath}-\vec{k}\right)\ \text{m}$, $\vec{Y}=\left(4\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}\right)\ \text{m}$ et $\vec{Z}=\left(-3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+\vec{k}\right)\ \text{m}$. Déterminez :

a) $\left(\vec{X}\bullet\vec{Y}\right)\vec{Z}$
b) $\vec{X}+\vec{Z}\bullet\vec{Y}$
c) $\left(\vec{X}-\vec{Y}\right)\bullet\vec{Z}$

3.20 Exercice : L'angle solution ►

Déterminez l'angle que forment entre eux les vecteurs $\vec{A}=(12\vec{\imath}-2\vec{\jmath})\ \text{m}$ et $\vec{B}=\left(4\vec{\jmath}+7\vec{k}\right)\ \text{m}$.

3.13 - a) $\left(4{,}13\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+7{,}09\vec{k}\right)\ \text{m}$ — b) $\left(8\vec{\imath}+1{,}5\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)$ — c) $\left(4\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-\vec{k}\right)\ \text{m}$ — d) $(57{,}7\vec{\imath}+12{,}7\vec{\jmath})\ \text{m}$
3.14 - a) R_x = 15,2 m — b) 5,12 m — c) $(15{,}2\vec{\imath}+5{,}12\vec{\jmath})\ \text{m}$ — d) 16,1 m — e) 18,6° — f) $(10{,}7\vec{\imath}+7{,}12\vec{\jmath})\ \text{m}$
3.15 - a) (52,5 m, 206°) — b) (81,9 m, 125°) — c) (202 m, -62,2°) — **3.16** - −10,0 m² — **3.17** - −6,47 cm² — **3.18** - $A=B=12{,}8$
3.19 - a) $\left(-27\vec{\imath}+45\vec{\jmath}+9\vec{k}\right)\ \text{m}^2$ — b) −10,8 m — c) 4,00 m — **3.20** - θ = 60,7°

Équations Sect 3.1, #1 à 12 Sect 3.2, #13 à 15 Sect 3.3, #16 à 20

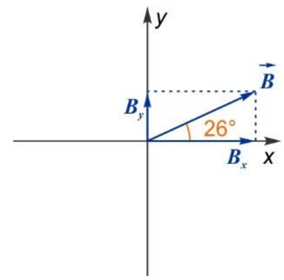
CH 3 LES VECTEURS

3.1 PROPRIÉTÉS DES VECTEURS

3.1 Solution : Composantes d'un vecteur

retour à la question ▲

a) $\vec{B} = (4{,}00\text{ m},\ \ 1{,}95\text{ m})$



Les composantes *x* et *y* d'un vecteur $\vec{B}$, en fonction de son module et son orientation, sont :

$$B_x = B\cos\theta_B$$
$$B_y = B\sin\theta_B$$

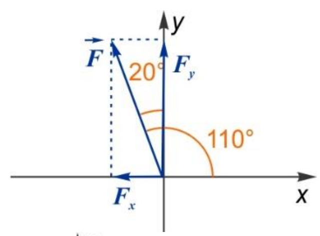
Puisque l'angle donné est par défaut l'orientation dans le plan cartésien, il s'agit déjà de θ_B, donc :

$$B_x = 4{,}45\text{ m} \times \cos 26° \quad = \quad 4{,}00\text{ m}$$
$$B_y = 4{,}45\text{ m} \times \sin 26° \quad = \quad 1{,}95\text{ m}$$

$$\vec{B} = \mathbf{(4,00\ m,\ \ 1,95\ m)}$$

b) $\vec{F} = (-188\text{ N},\ \ 517\text{ N})$

L'angle donné n'est pas celui qui doit être utilisé avec les équations générales des composantes. Un vecteur dans le second cadran à 20° de l'axe *y* a en réalité une orientation de 110° (voir figure). On peut alors procéder au calcul des composantes :

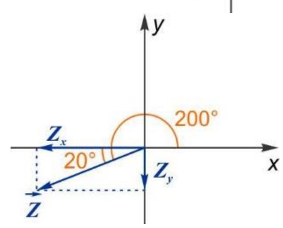


$$F_x = F\cos\theta \quad = \quad 550\text{ N} \times \cos 110° \quad = \quad -188\text{ N}$$
$$F_y = F\sin\theta \quad = \quad 550\text{ N} \times \sin 110° \quad = \quad 517\text{ N}$$

$$\vec{F} = \mathbf{(-188\ N,\ \ 517\ N)}$$

c) $\vec{Z} = (-84{,}6\text{ cm},\ \ -30{,}8\text{ cm})$

Un vecteur orienté à 20° sous la portion négative de l'axe *x* a en réalité une orientation de 200°, pour les calculs des composantes par les équations générales (voir figure). Les composantes sont :



$$Z_x = 90{,}0\text{ cm} \times \cos 200° \quad = \quad -84{,}6\text{ cm}$$
$$Z_y = 90{,}0\text{ cm} \times \sin 200° \quad = \quad -30{,}8\text{ cm}$$

$$\vec{Z} = \mathbf{(-84,6\ cm,\ \ -30,8\ cm)}$$

retour à la question ▲

3.2 Solution : Solutions doubles

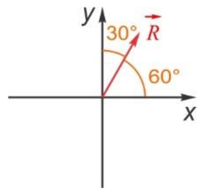
retour à la question ▲

Exercices en ligne

3.3 Solution : Vecteurs illustrés retour à la question ▲

a) $\theta_R = 60°$

L'orientation θ d'un vecteur doit être donnée par rapport à l'axe *x*, mesurée en sens antihoraire. Un vecteur à 30° à gauche de l'axe *y* a en réalité une orientation de **60°** par rapport à l'axe *x*.



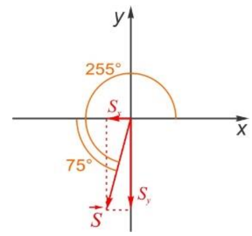
b) $\vec{S} = (-5{,}17 \text{ cm}, \ \ -19{,}3 \text{ cm})$

Pour utiliser les équations générales qui permettent de calculer les composantes, on doit d'abord identifier l'angle qui représente réellement l'orientation du vecteur $\vec{S}$. À 75° sous l'axe *y* négatif, son orientation est de 255° (voir figure ci-contre).

Ses composantes sont alors données par :

$$S_x = 20 \text{ cm} \times \cos 255° \quad = \quad -5{,}17 \text{ cm}$$
$$S_y = 20 \text{ cm} \times \sin 255° \quad = \quad -19{,}3 \text{ cm}$$

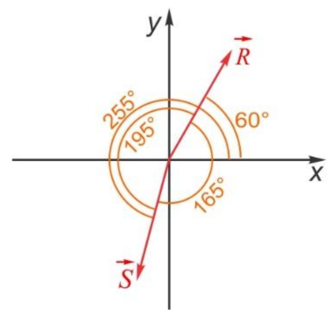
$$\vec{S} = (\mathbf{-5,17\ cm}, \ \ \mathbf{-19,3\ cm})$$



c) $\theta_{RS} = 165°$

On peut identifier deux angles séparant les vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{S}$, dépendamment du sens dans lequel on se rend de l'un à l'autre. La somme de ces deux angles est 360°; le plus petit des deux angles ne peut donc dépasser 180° (dans le cas où les vecteurs sont opposés).

Une méthode pour identifier l'un des angles est de faire la différence entre leurs orientations, définies par rapport à la même référence. Puisqu'en a) et b) on a déterminé ces orientations pour $\vec{R}$ et $\vec{S}$, l'angle entre eux (en valeur absolue car une valeur négative ne représenterait pas une information supplémentaire) est :



$$\theta_{RS} = |\theta_S - \theta_R| \quad = \quad |255° - 60°| \quad = \quad 195°$$

Cet angle étant supérieur à 180°, on peut identifier le plus petit des deux angles par :

$$\theta_{RS} = 360° - 195° \quad = \quad \mathbf{165°}$$

d) $\vec{T} = (20{,}0 \text{ cm}, \ \ 180°)$

On sait que le vecteur $\vec{T}$ mesure 20 cm et son orientation peut être rapidement déduite car il est parfaitement opposé à l'axe *x* positif : $\theta_T = 180°$. Ses coordonnées polaires sont donc :

$$\vec{T} = (\mathbf{20,0\ cm}, \ \ \mathbf{180°})$$

retour à la question ▲

3.4 Solution : La bonne tangente retour à la question ▲

a) $\vec{A} = (7{,}94\text{ m},\ 61{,}8°)$

À partir des composantes d'un vecteur, ses module et orientation sont donnés par :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (1)$$

$$\theta_A = tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \qquad (2)$$

Pour le vecteur $\vec{A} = (7{,}94\text{ m},\ 61{,}8°)$, le module est :

$$A = \sqrt{(3{,}75\text{ m})^2 + (7{,}00\text{ m})^2} \quad = \quad \mathbf{7{,}94\ m}$$

L'orientation nécessite une précaution quant au résultat : on doit vérifier si l'angle obtenu par l'équation (2) correspond bien à l'orientation du vecteur traité ou à son opposé. Les deux composantes du vecteur $\vec{A}$ étant positives, celui-ci se trouve dans le 1er cadran. Il faudra appliquer une correction à l'angle si l'équation (2) ne donne pas une telle orientation :

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{7{,}00\text{ m}}{3{,}75\text{ m}}\right) \quad = \quad \mathbf{61{,}8°}$$

Cet angle est cohérent avec un vecteur dans le 1er cadran; c'est donc la véritable orientation du vecteur $\vec{A}$:

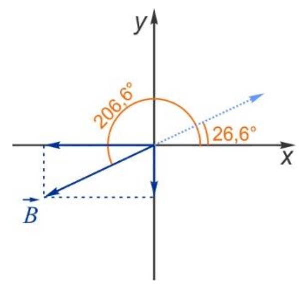
$$\vec{A} = (7{,}94\text{ m},\ 61{,}8°)$$

b) $\vec{B} = (4{,}47\text{ m},\ 207°)$

Le vecteur $\vec{B}$ se trouve dans le 3e cadran puisque ses deux composantes sont négatives (voir figure qui suit). À partir des équations (1) et (2) appliquées au vecteur $\vec{B}$:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad = \quad \sqrt{(-4\text{ m})^2 + (-2\text{ m})^2} \quad = \quad \mathbf{4{,}47\ m}$$

$$\theta_B = tan^{-1}\left(\frac{B_y}{B_x}\right) \quad = \quad \tan^{-1}\left(\frac{-2\text{ m}}{-4\text{ m}}\right) \quad = \quad 26{,}6°$$



L'orientation trouvée ne correspond pas au 3e cadran. On doit donc ajouter 180° à la valeur trouvée pour obtenir la réelle orientation du vecteur $\vec{B}$:

$$\theta_B = 26{,}6° + 180° \quad = \quad \mathbf{206{,}6°}$$

Dans les faits, cette correction doit être faite dans tous les cas où la composante *y* du vecteur dont on cherche l'orientation est négative.

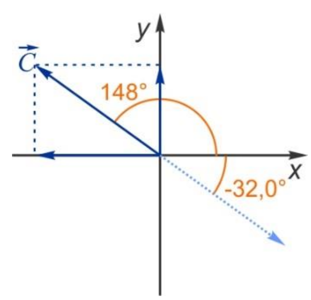
$$\vec{B} = (4{,}47\text{ m},\ 207°)$$

c) $\vec{C} = \left(47{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}},\ 148°\right)$

Les composantes du vecteur $\vec{C}$ ont volontairement été données dans l'ordre non conventionnel, C_y avant C_x. Avec une composante *x* négative et une composante *y* positive, le vecteur $\vec{C}$ se trouve dans le 2e cadran. Selon les équations (1) et (2) :

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \quad = \quad \sqrt{\left(-40{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(25{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \quad = \quad \mathbf{47{,}2\ \frac{m}{s}}$$

$$\theta_C = \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) \quad = \quad \tan^{-1}\left(\frac{25{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-40{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) \quad = \quad \mathbf{-32{,}0°}$$



L'angle de –32,0° se trouve dans le 4e cadran, ce qui n'est pas le cas du vecteur $\vec{C}$, selon ses composantes. On doit donc ajouter 180° pour obtenir l'orientation opposée, celle du réel vecteur $\vec{C}$:

$$\theta_C = -32{,}0° + 180° \quad = \quad \mathbf{148°}$$

$$\vec{C} = \left(47{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}},\ 148°\right)$$

d) $\vec{D} = (2{,}50\text{ m},\ 180°)$

Avec une composante nulle, l'orientation d'un vecteur est facile à identifier. La seule composante non nulle, D_x, est négative; le vecteur $\vec{D}$ est donc dirigé vers l'axe *x* négatif. Son orientation est donc de 180°, et son module est équivalent à la grandeur de la composante non nulle $D = |D_x| = 2{,}50$ m. Donc :

$$\vec{D} = \mathbf{(2{,}50\ m,\ \ 180°)}$$

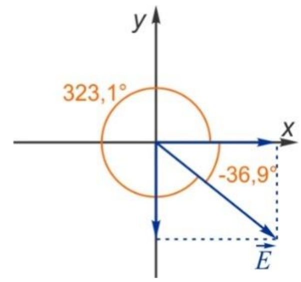
e) $\vec{E} = (100\ \mathrm{N},\ \ 323°)$

Le module du vecteur $\vec{E}$ est déjà donné, cependant, il nous faut évaluer la composante inconnue E_y pour calculer l'orientation de $\vec{E}$. À partir de l'équation (1), on peut isoler la composante y :

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad \rightarrow \quad E_y = \sqrt{E^2 - E_x^2} \;=\; \pm\sqrt{(100\ \mathrm{N})^2 - (80\ \mathrm{N})^2} \;=\; \pm\, 60\ \mathrm{N}$$

Il est indiqué que la composante E_y est négative, on conserve donc la solution négative de la racine : E_y = -60 N. Le vecteur $\vec{E}$ est par ailleurs dirigé dans le 4e cadran, car $E_x > 0$ et $E_y < 0$. On peut alors calculer l'orientation à partir de l'équation (2) :

$$\theta_E = tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) \;=\; tan^{-1}\left(\frac{-60\ \mathrm{N}}{80\ \mathrm{N}}\right) \;=\; -\,36{,}9°$$



Cette orientation est bel et bien dans le 4e cadran; on peut donc conserver cette valeur telle quelle. On peut également lui ajouter 360° pour obtenir une valeur positive, mais ce n'est pas obligatoire :

$$\theta_C = -36{,}9° \;=\; -\,36{,}9° + 360° \;=\; \mathbf{323{,}1}$$

Finalement :

$$\vec{\mathrm{E}} = (100\ N,\ \ 323°)$$

retour à la question ▲

3.5 Solution : Angle entre V et W retour à la question ▲

$\Delta\theta$ = 130°

À partir des composantes des deux vecteurs, on peut calculer leurs orientations respectives. Pour $\vec{V}$, un vecteur situé dans le 4e cadran :

$$\theta_V = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) \;=\; \tan^{-1}\left(\frac{-4{,}10\ \mathrm{m}}{5{,}25\ \mathrm{m}}\right) \;=\; -\,38{,}0°$$

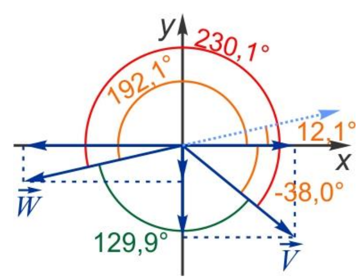
Cet angle se trouve bien dans le 4e cadran, donc aucune correction n'est requise.

Pour $\vec{W}$, un vecteur situé dans le 3e cadran :

$$\theta_W = \tan^{-1}\left(\frac{W_y}{W_x}\right) \;=\; \tan^{-1}\left(\frac{-1{,}50\ \mathrm{cm}}{-7{,}00\ \mathrm{cm}}\right) \;=\; 12{,}1°$$

Cet angle indique plutôt le 1er cadran; il faut donc ajouter 180° pour retrouver la véritable orientation du vecteur $\vec{W}$:

$$\theta_W = 12{,}1° + 180° \;=\; 192{,}1°$$



On cherche donc l'angle entre deux vecteurs dont les orientations sont –38,0° et 192,1° (voir figure ci-contre). A priori, la différence entre ces deux orientations est :

$$\Delta\theta = \theta_W - \theta_V \;=\; 192{,}1° - (-38{,}0°) \;=\; 230{,}1°$$

Il s'agit bien d'un angle entre les deux vecteurs, mais ce n'est pas le plus petit des deux angles. Par l'autre côté, l'angle est :

$$\Delta\theta = 360° - 230{,}1° \;=\; \mathbf{129{,}9°}$$

retour à la question ▲

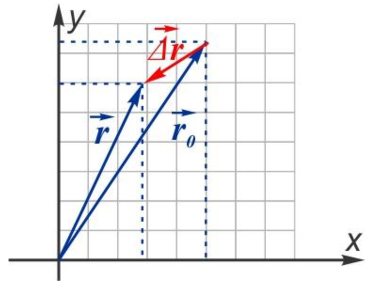
3.6 Solution : Déplacement quelconque

retour à la question ▲

$\Delta r = 13{,}2$ m et $\theta = 212°$

Un vecteur déplacement, en deux dimensions, est défini par :

$$\overrightarrow{\Delta r} = \Delta x\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath}$$



Avec les valeurs initiales et finales connues en *x* et *y* :

$$\overrightarrow{\Delta r} = (x - x_0)\vec{\imath} + (y - y_0)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (14{,}0\text{ m} - 25{,}2\text{ m})\vec{\imath} + (29{,}8\text{ m} - 36{,}8\text{ m})\vec{\jmath}$$

$$= (-11{,}2\text{ m})\vec{\imath} + (-7{,}00\text{ m})\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-11{,}2\vec{\imath} - 7{,}00\vec{\jmath})\text{ m}$$

Pour obtenir le module et l'orientation de ce déplacement;

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(-11{,}2\text{ m})^2 + (-7{,}00\text{ m})^2} = \mathbf{13{,}2\text{ m}}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-7{,}00\text{ m}}{-11{,}2\text{ m}}\right) = -32{,}0°$$

Cette orientation se trouve dans le 1er cadran, ce qui est incohérent avec l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\Delta r}$ tel qu'illustré. On doit donc ajouter 180° pour obtenir la deuxième solution de la fonction inverse tangente :

$$\theta^* = 32{,}0° + 180° = \mathbf{212°}$$

Donc : $\Delta r = 13{,}2$ m et $\theta = 212°$.

retour à la question ▲

3.7 Solution : Trois vecteurs

retour à la question ▲

a) $\vec{B}$

Les composantes des trois vecteurs ne permettent pas de déceler sans calcul lequel des vecteurs a le plus grand module. On doit donc calculer leurs trois modules pour le déterminer.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(4{,}20\text{ m})^2 + (-4{,}20\text{ m})^2} = 5{,}94\text{ m}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(4{,}50\text{ m})^2 + (-3{,}90\text{ m})^2} = 5{,}95\text{ m}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(-4{,}35\text{ m})^2 + (4{,}05\text{ m})^2} = 5{,}94\text{ m}$$

Le vecteur $\vec{B}$ est légèrement plus grand que les autres.

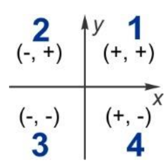
b) $\vec{A}$: 4; $\vec{B}$: 1; $\vec{C}$: 2.

Les signes des composantes d'un vecteur suffisent à indiquer le cadran dans lequel un vecteur est orienté (voir figure ci-contre). Ainsi :

$\vec{A}$ = (4,20, −4,20) m ➔ Cadran 4

$\vec{B}$ = (4,50, 3,90) m ➔ Cadran 1

$\vec{C}$ = (−4,35, 4,05) m ➔ Cadran 2



retour à la question ▲

3.8 Solution : Angles et vecteurs

retour à la question ▲

Exercices en ligne

3.9 Solution : i-j-k retour à la question ▲

a) $(2{,}50\vec{\imath} + 3{,}30\vec{\jmath})$ m

Puisqu'on ne donne que deux composantes au vecteur dans le format utilisé, on comprend qu'il s'agit d'un vecteur en deux dimensions, donc par convention, en *x* et en *y*.

b) $(45{,}2\vec{\imath} + 27{,}1\vec{\jmath})$ N

On donne les composantes *x* et *y* d'un vecteur, ce qui implique les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

c) $(-12{,}2\vec{\imath} - 5{,}70\vec{\jmath})$ cm

On doit d'abord calculer les composantes *x* et *y* avant de pouvoir exprimer les vecteurs en fonction des vecteurs unitaires :

$$C_x = 13{,}5\ cm \times cos\,205° \quad = \quad \mathbf{-\,12,2\ cm}$$
$$C_y = 13{,}5\ cm \times sin\,205° \quad = \quad \mathbf{-\,5,70\ cm}$$

➔ En réunissant ces deux valeurs : $(-12{,}2\vec{\imath} - 5{,}70\vec{\jmath})$ cm

d) $\left(25\vec{\imath} + 19\vec{\jmath} + 12\vec{k}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Il suffit ici de réunir les 3 valeurs en une seule expression comprenant $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$:

$$R_x = 25\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$R_y = 19\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$R_z = 12\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

➔ $\left(\mathbf{25\vec{\imath} + 19\vec{\jmath} + 12\vec{k}}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

retour à la question ▲

3.10 Solution : Modules retour à la question ▲

a) *A* = 13,2

Le module d'un vecteur en deux dimensions est donné par :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad = \quad \sqrt{(13{,}0)^2 + (2{,}4)^2} \quad = \quad \mathbf{13,2}$$

On ne donne pas d'unités au vecteur $\vec{A}$; le résultat est donc sans unités.

b) *R* = 5,2 m

Lorsqu'un vecteur ne comporte qu'une composante, la grandeur de cette composante coïncide avec le module du vecteur. Ici, il s'agit de la valeur absolue de cette composante, car un module est nécessairement positif. Les unités font partie du module.

c) *B* = 4,98 cm

Le module d'un vecteur en trois dimensions est donné par :

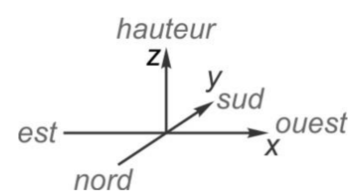
$$\mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{B}_x^2 + \mathrm{B}_y^2 + \mathrm{B}_z^2} \quad = \quad \sqrt{(1{,}5\ \mathrm{m})^2 + (-2{,}4\ \mathrm{m})^2 + (4{,}1\ m)^2} \quad = \quad 4{,}98\ cm$$

retour à la question ▲

3.11 Solution : The shipping robot retour à la question ▲

a) $\Delta\vec{P} = \left(-43{,}0\vec{\imath} + 21{,}5\vec{\jmath} - 1{,}4\vec{k}\right)$ m

Commençons par exprimer les deux positions (*P*) comme des vecteurs. Selon les orientations *x*, *y* et *z* définies par le schéma, les positions initiale et finale sont :



$$\vec{\mathrm{P}}_\mathrm{i} = \left(23{,}5\vec{\imath} - 13{,}5\vec{\jmath} + 2{,}3\vec{k}\right)\ \mathrm{m}$$

$$\vec{\mathrm{P}}_\mathrm{f} = \left(-19{,}5\vec{\imath} + 8{,}0\vec{\jmath} + 0{,}9\vec{k}\right)\ \mathrm{m}$$

Le déplacement est la différence entre les positions finale et initiale :

$$\Delta\vec{P} = \vec{\mathrm{P}}_\mathrm{f} - \vec{\mathrm{P}}_\mathrm{i} \quad = \quad \left(-19{,}5\vec{\imath} + 8{,}0\vec{\jmath} + 0{,}9\vec{k}\right)\ \mathrm{m} \;-\; \left(23{,}5\vec{\imath} - 13{,}5\vec{\jmath} + 2{,}3\vec{k}\right)\ \mathrm{m} \quad = \quad \left(\mathbf{-43,0\vec{\imath} + 21,5\vec{\jmath} - 1,4\vec{k}}\right)\ \boldsymbol{m}$$

b) *ΔP* = 48,1 m

Le module d'un vecteur en trois dimensions est donné par :

$$\Delta\mathrm{P} = \sqrt{\Delta\mathrm{P}_x^2 + \Delta\mathrm{P}_y^2 + \Delta\mathrm{P}_z^2} \quad = \quad \sqrt{(-43{,}0\ \mathrm{m})^2 + (21{,}5\ \mathrm{m})^2 + (-1{,}4\ \mathrm{m})^2} \quad = \quad \mathbf{48,1\ m}$$

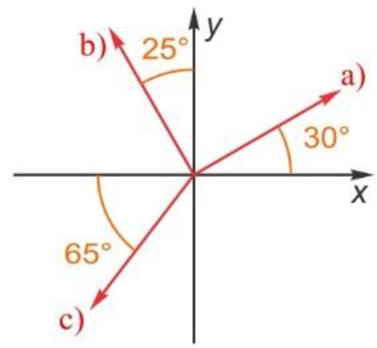
retour à la question ▲

3.12 Solution : i et j retour à la question ▲

Exprimer en fonction des vecteurs unitaires un vecteur connu en cordonnées polaires exige que l'on détermine ses composantes *x* et *y*. En deux dimensions, les composantes d'un vecteur $\vec{A}$ sont données par :

$$A_x = A\cos\theta \qquad \text{et} \qquad A_y = A\sin\theta$$

En fonction des vecteurs unitaires, ce vecteur s'exprime : $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$



a) $\vec{A} = (17{,}3\vec{\imath} + 10{,}0\vec{\jmath})$ cm

Soit le vecteur $\vec{A} = (20\text{ cm},\ 30°)$:

$$A_x = A\cos\theta_A = 20\text{ cm} \times \cos 30° = 17{,}3\text{ cm}$$
$$A_y = A\sin\theta_A = 20\text{ cm} \times \sin 30° = 10{,}0\text{ cm}$$

Donc : $\vec{A} = \mathbf{(17,3\vec{\imath} + 10,0\vec{\jmath})\ cm}$

b) $\vec{B} = (-8{,}45\vec{\imath} + 18{,}1\vec{\jmath})$ cm

Si le vecteur (disons $\vec{B}$) est orienté à 25° à gauche de l'axe *y*, sa réelle orientation (par rapport à l'axe x^+) est donc de 115°. Ainsi, $\vec{B} = (20\text{ cm},\ 115°)$:

$$B_x = B\cos\theta_B = 20\text{ cm} \times \cos 115° = -8{,}45\text{ cm}$$
$$B_y = B\sin\theta_B = 20\text{ cm} \times \sin 115° = 18{,}1\text{ cm}$$

Donc : $\vec{B} = \mathbf{(-8,45\vec{\imath} + 18,1\vec{\jmath})\ cm}$

c) $\vec{C} = (-8{,}45\vec{\imath} - 18{,}1\vec{\jmath})$ cm

Si le vecteur (disons $\vec{C}$) est orienté à 65° sous l'axe x^-, sa réelle orientation (par rapport à l'axe x^+) est donc de 245°. Ainsi, $\vec{C} = (20\text{ cm},\ 245°)$:

$$C_x = C\cos\theta_C = 20\text{ cm} \times \cos 245° = -8{,}45\text{ cm}$$
$$C_y = C\sin\theta_C = 20\text{ cm} \times \sin 245° = -18{,}1\text{ cm}$$

Donc : $\vec{C} = \mathbf{(-8,45\vec{\imath} - 18,1\vec{\jmath})\ cm}$

retour à la question ▲

Équations Sect 3.1, #1 à 12 Sect 3.2, #13 à 15 Sect 3.3, #16 à 20

3.2 OPÉRATIONS ET ALGÈBRE VECTORIELLE

3.13 Solution : Opérations retour à la question ▲

a) $\left(4{,}13\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+7{,}09\vec{k}\right)$ m

Le format dans lequel sont donnés les vecteurs nous permet de reconnaître leurs composantes *x*, *y* et *z*. En convertissant en mètres les unités du second vecteur :

$$\left(4\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+7\vec{k}\right)\text{ m} \qquad \text{et} \qquad \left(0{,}13\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+0{,}09\vec{k}\right)\text{ m}$$

La somme est donc :

$$\left(4\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+7\vec{k}\right)\text{ m} \;+\; \left(0{,}13\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+0{,}09\vec{k}\right)\text{ m} \;=\; \boldsymbol{\left(4,13\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+7,09\vec{k}\right)\text{ m}}$$

b) $\left(8\vec{\imath}+1{,}5\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)$

Les composantes des deux vecteurs ne sont pas données dans le même ordre, mais on effectue l'opération entre les composantes $\vec{\imath}$ ensemble, les composantes $\vec{\jmath}$ ensemble, etc. Donc :

$$\left(2{,}5\vec{\jmath}+3\vec{k}+9\vec{\imath}\right) \;-\; \left(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\right) \;=\; \boldsymbol{\left(8\vec{\imath}+1,5\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)}$$

c) $\left(4\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-\vec{k}\right)$

Le vecteur $\left(-8\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$ ne présente pas de terme en $\vec{\imath}$; il est donc équivalent à $\left(0\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$. Sans oublier la multiplication préalable du premier terme, on obtient :

$$\left[2\times\left(2\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-\vec{k}\right)\right] \;+\; \left(-2\vec{\jmath}+\vec{k}\right) \;=\; \left(4\vec{\imath}+10\vec{\jmath}-2\vec{k}\right) \;+\; \left(0\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}\right) \;=\; \boldsymbol{\left(4\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-\vec{k}\right)}$$

d) $(57{,}7\vec{\imath}+12{,}7\vec{\jmath})$ m

Commençons par exprimer le vecteur du premier terme en fonction des vecteurs unitaires :

$(4\text{ m};\;\; 45°)$ ➔

$$\begin{aligned} A_x &= 4\text{ m}\times\cos 45° &= 2{,}83\text{ cm} \\ A_y &= 4\text{ m}\times\sin 45° &= 2{,}83\text{ cm} \end{aligned} \quad ➔ \quad \vec{A}=(2{,}83\vec{\imath}+2{,}83\vec{\jmath})\text{ m}$$

L'opération totale entraîne :

$$4{,}5\times(2{,}83\vec{\imath}+2{,}83\vec{\jmath})\text{ m} \;+\; (45\vec{\imath})\text{ m} \;=\; \boldsymbol{(57,7\vec{\imath}+12,7\vec{\jmath})\text{ m}}$$

retour à la question ▲

3.14 Solution : R2D2 retour à la question ▲

a) R_x = 15,2 m

Selon la définition du vecteur $\vec{R}$, sa composante x est :

$$R_x = 2D_{1x} + 4{,}5D_{2x}$$

On doit alors connaître les composantes des vecteurs $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$:

$$D_{1x} = D_1 \cos\theta_{D_1} \quad = \quad 5{,}45\text{ m} \times \cos 62° \quad = \quad 2{,}56\text{ m}$$
$$D_{1y} = D_1 \sin\theta_{D_1} \quad = \quad 5{,}45\text{ cm} \times \sin 62° \quad = \quad 4{,}81\text{ m}$$

Les composantes de $\vec{D}_2$ ne demandent aucun calcul car $\vec{D}_2$ est donné en fonction des vecteurs unitaires :

$$D_{2x} = 2{,}25\text{ m}$$
$$D_{2y} = -1{,}00\text{ m}$$

De retour au calcul de R_x :

$$R_x = 2D_{1x} \ + \ 4{,}5D_{2x} \quad = \quad 2 \times 2{,}56\text{ m} \ + \ 4{,}5 \times 2{,}25\text{ m} \quad = \quad \mathbf{15,2\ m}$$

b) R_y = 5,12 m

Selon la définition du vecteur $\vec{R}$, sa composante y est :

$$R_y = 2D_{1y} \ + \ 4{,}5D_{2y} \quad = \quad 2 \times 4{,}81\text{ m} \ + \ 4{,}5 \times (-1{,}00\text{ m}) \quad = \quad \mathbf{5,12\ m}$$

c) $\vec{R} = (15{,}2\vec{\imath} + 5{,}12\vec{\jmath})$ m

On réunit les composantes de $\vec{R}$ pour obtenir $\vec{R} = \mathbf{(15,2\vec{\imath} + 5,12\vec{\jmath})\ m}$.

d) R = 16,1 m

Le module du vecteur $\vec{R}$ sont données par :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad = \quad \sqrt{(15{,}2\text{ m})^2 + (5{,}12\text{ m})^2} \quad = \quad 16{,}1\text{ m}$$

e) θ_R = 18,6°

L'orientation de $\vec{R}$ s'obtient par :

$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad = \quad \tan^{-1}\left(\frac{5{,}12\text{ m}}{15{,}2\text{ m}}\right) \quad = \quad 18{,}6°$$

Puisque les deux composantes de $\vec{R}$ sont positives, ce vecteur se trouve dans le 1er cadran, et l'angle obtenu est le bon.

f) $(10{,}7\vec{\imath} + 7{,}12\vec{\jmath})$ m

Maintenant que l'on connaît le vecteur $\vec{R}$, on peut effectuer de nouvelles opérations qui l'impliquent :

$$\vec{R} - 2\vec{D}_2 = (15{,}2\vec{\imath} + 5{,}12\vec{\jmath})\text{ m} \ - \ 2 \times (2{,}25\vec{\imath} - 1\vec{\jmath})\text{ m}$$

$$= \quad \big((15{,}2 - 2 \times 2{,}25)\vec{\imath} \ + \ (5{,}12 - 2 \times (-1))\vec{\jmath}\big)\text{ m} \quad = \quad \mathbf{(10,7\vec{\imath} + 7,12\vec{\jmath})\ m}$$

retour à la question ▲

3.15 Solution : La promenade retour à la question ▲

On doit commencer par connaître les composantes des deux vecteurs impliqués, avant de pouvoir faire des opérations entre ces vecteurs. Pour $\vec{X}$, une orientation vers le sud peut être assimilée à une orientation de 270° si on considère un axe *x* positif vers l'est (orientation normale d'une carte géographique). Ainsi :

$$X_x = X\cos\theta_X = 45 \text{ m} \times \cos 270° = 0 \text{ m}$$
$$X_y = X\sin\theta_X = 45 \text{ m} \times \sin 270° = -45 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \vec{X} = (0\vec{\imath} - 45\vec{\jmath}) \text{ m}$$

Et pour $\vec{Y}$, une orientation de 25° au nord de l'ouest correspond à une orientation mathématique de 155° :

$$Y_x = Y\cos\theta_Y = 52 \text{ m} \times \cos 270° = -47{,}13 \text{ m}$$
$$Y_y = Y\sin\theta_Y = 52 \text{ m} \times \sin 270° = 21{,}98 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \vec{Y} = (-47{,}13\vec{\imath} + 21{,}98\vec{\jmath}) \text{ m}$$

On peut alors procéder à des opérations impliquant ces deux vecteurs.

a) $\vec{R} = (52{,}5 \text{ m};\ 206°)$

$$\vec{X} + \vec{Y} = (0\vec{\imath} - 45\vec{\jmath}) \text{ m} + (-47{,}13\vec{\imath} + 21{,}98\vec{\jmath}) \text{ m}$$
$$= ((0 + (-47{,}13))\,\vec{\imath} + (-45 + 21{,}98)\,\vec{\jmath}) \text{ m} = (-47{,}13\vec{\imath} - 23{,}02\vec{\jmath}) \text{ m}$$

Avec les composantes de la somme, on peut enfin calculer le module et l'orientation de ce vecteur résultant (posons $\vec{R}$) :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-47{,}13 \text{ m})^2 + (-23{,}02 \text{ m})^2} = \mathbf{52{,}5\ m}$$

$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-23{,}02 \text{ m}}{-47{,}13 \text{ m}}\right) = 26{,}04°$$

Cette orientation est à l'opposée de celle d'un vecteur dont les deux composantes sont négatives.

$$\theta_R^* = 26{,}04° + 180° = \mathbf{206°}$$

$$\vec{R} = (\mathbf{52{,}5\ m;\ 206°})$$

b) $\vec{R} = (81{,}9 \text{ m};\ 125°)$

$$\vec{Y} - \vec{X} = (-47{,}13\vec{\imath} + 21{,}98\vec{\jmath}) \text{ m} - (0\vec{\imath} + 21{,}98 - 45\vec{\jmath}) \text{ m}$$
$$= \Big(\big((-47{,}13) - 0\big)\vec{\imath} + \big(21{,}98 - (-45)\big)\vec{\jmath}\Big) \text{ m} = (-47{,}13\vec{\imath} + 67{,}0\vec{\jmath}) \text{ m}$$

Avec les composantes de la somme, on peut enfin calculer le module et l'orientation de ce vecteur résultant (posons $\vec{R}$) :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-47{,}13 \text{ m})^2 + (67{,}0 \text{ m})^2} = \mathbf{81{,}9\ m}$$

$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{67{,}0 \text{ m}}{-47{,}13 \text{ m}}\right) = \mathbf{125°}$$

$$\vec{R} = (\mathbf{81{,}9\ m;\ 125°})$$

c) $\vec{R} = (202 \text{ m};\ -62{,}2°)$

$$3\vec{X} - 2\vec{Y} = 3 \times (0\vec{\imath} - 45\vec{\jmath}) \text{ m} - 2 \times (-47{,}13\vec{\imath} + 21{,}98\vec{\jmath}) \text{ m}$$
$$= \Big(\big(3 \times 0 - 2 \times (-47{,}13)\big)\vec{\imath} + \big(3 \times (-45) - 2 \times 21{,}98\big)\vec{\jmath}\Big) \text{ m} = (94{,}26\vec{\imath} - 178{,}95\vec{\jmath}) \text{ m}$$

Avec les composantes de la somme, on peut enfin calculer le module et l'orientation de ce vecteur résultant (posons $\vec{R}$) :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(94{,}26 \text{ m})^2 + (-178{,}95 \text{ m})^2} = \mathbf{202\ m}$$

$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-178{,}95 \text{ m}}{94{,}26 \text{ m}}\right) = \mathbf{-62{,}2°}$$

$$\vec{R} = (\mathbf{202\ m;\ -62{,}2°})$$

retour à la question ▲

3.16 Solution : Le produit scalaire I

retour à la question ▲

–10,0 m²

Puisqu'on connaît les composantes des deux vecteurs impliqués, on peut utiliser la forme suivante du produit scalaire :

$$\vec{R} \bullet \vec{S} = R_x S_x + R_y S_y + R_z S_z$$

Le vecteur $\vec{S}$ n'a que deux termes; on doit comprendre que la composante *y* est nulle. Avec les valeurs connues :

$$\vec{R} \bullet \vec{S} = \big(2\text{ m} \times (-1\text{ m})\big) + (1\text{ m} \times 0) + \big((-4\text{ m}) \times 2\text{ m}\big) = \mathbf{-10,0\ m^2}$$

retour à la question ▲

3.17 Solution : Le produit scalaire II

retour à la question ▲

–6,47 cm²

On connait les modules des deux vecteurs, et on a des informations permettant d'évaluer l'angle entre eux. On pourra alors utiliser la forme suivante du produit scalaire :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB \cos\theta_{AB}$$

Les angles de 45° et 60° que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ font avec l'axe *x* entraînent un angle de 105° entre eux. Les modules étant tous deux de 5 cm :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 5\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times \cos 105° = \mathbf{-6,47\ cm^2}$$

retour à la question ▲

3.18 Solution : Le produit scalaire III

retour à la question ▲

A = *B* = 12,8

Puisqu'on doit manipuler le module des vecteurs et l'angle qu'ils forment entre eux, l'équation utile pour le produit scalaire sera :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB \cos\theta_{AB}$$

Les vecteurs ayant des modules identiques, on pourrait aussi écrire :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AA \cos\theta_{AB} = A^2 \cos\theta_{AB}$$

Notez que l'angle est toujours celui entre les deux vecteurs (n'ayant pas la même orientation), mais puisque $B = A$, alors $AB = A^2$.

On nous indique que le résultat du produit scalaire des deux vecteurs est 42,5, donc on peut isoler le module *A* pour évaluer les modules inconnus :

$$A = \sqrt{\frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\cos\theta_{AB}}} = \sqrt{\frac{42{,}5}{\cos 75°}} = 12{,}8$$

Le résultat du produit scalaire n'ayant pas d'unités, on en déduit que les modules n'ont pas d'unités.

retour à la question ▲

3.19 Solution : Le produit scalaire IV retour à la question ▲

a) $(-27\vec{\imath}+45\vec{\jmath}+9\vec{k})\ \mathrm{m}^2$

L'expression à résoudre est $(\vec{X}\bullet\vec{Y})\vec{Z}$.

Selon les règles de priorité des opérations, on doit d'abord effectuer le produit scalaire de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$. Avec les composantes, on a :

$$\vec{X}\bullet\vec{Y} = X_xY_x + X_yY_y + X_zY_z \quad = \quad (3\ \mathrm{m}\times 4\ \mathrm{m}) \ + \ \big(0\times(-1\ \mathrm{m})\big) \ + \ \big((-1\ \mathrm{m})\times 3\ \mathrm{m}\big) \ + \quad = \quad 9\ \mathrm{m}^2$$

On effectue ensuite le produit par $\vec{Z}$:

$$(\vec{X}\bullet\vec{Y})\vec{Z} = 9\ \mathrm{m}^2\times(-3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+\vec{k}) \quad = \quad \mathbf{(-27\vec{\imath}+45\vec{\jmath}+9\vec{k})\ m^2}$$

b) −10,8 m

Les règles de priorité des opérations exigent qu'on effectue d'abord le produit scalaire de $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$:

$$\vec{Y}\bullet\vec{Z} = Y_xZ_x + Y_yZ_y + Y_zZ_z \quad = \quad \big(4\ \mathrm{m}\times(-3)\big) \ + \ \big((-1\ \mathrm{m})\times 5\big) \ + \ (3\ \mathrm{m}\times 1) \quad = \quad -14{,}0\ \mathrm{m}$$

L'opération suivante est une somme, impliquant le module de $\vec{X}$:

$$X = \sqrt{X_x^2+X_y^2+X_z^2} \quad = \quad \sqrt{(3\ \mathrm{m})^2+(0)^2+(-1\ \mathrm{m})^2} \quad = \quad \sqrt{10}\ \mathrm{m}$$

Donc :

$$\vec{X}+\vec{Y}\bullet\vec{Z} \quad = \quad \sqrt{10}\ \mathrm{m} \ + \ (-14{,}0\ \mathrm{m}) \quad = \quad \mathbf{-10{,}8\ m}$$

c) 4,00 m

Effectuons d'abord la différence à l'intérieur de la parenthèse :

$$(\vec{X}-\vec{Y}) = (3\vec{\imath}+0\vec{\jmath}-\vec{k})\ \mathrm{m} \ - \ (4\vec{\imath}-1\vec{\jmath}+3\vec{k})\ \mathrm{m} \quad = \quad (\vec{\imath}+\vec{\jmath}-4\vec{k})\ \mathrm{m}$$

On peut ensuite procéder au produit scalaire de ce résultat et du vecteur $\vec{Z}$:

$$(\vec{X}-\vec{Y})\bullet\vec{Z} = (-\vec{\imath}+\vec{\jmath}-4\vec{k})\ \mathrm{m} \ \bullet \ (-3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+\vec{k})$$

$$= \big((-1\ \mathrm{m})\times(-3)\big) \ + \ (1\ \mathrm{m}\times 5) \ + \ \big((-4\ \mathrm{m})\times 1\big) \quad = \quad \mathbf{4{,}00\ m}$$

retour à la question ▲

3.20 Solution : L'angle retour à la question ▲

θ_{AB} = 60,7°

On peut utiliser les deux définitions du produit scalaire pour faire un lien entre les composantes (que l'on connaît) et l'angle entre les vecteurs :

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta_{AB} \quad = \quad A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

On peut isoler l'angle θ_{AB} :

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{AB}\right)$$

On peut évaluer séparément les modules des vecteurs :

$$A = \sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \quad = \quad \sqrt{(12\ \mathrm{m})^2+(-2\ \mathrm{m})^2+(0)^2} \quad = \quad \sqrt{148}\ \mathrm{m}$$

$$B = \sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2} \quad = \quad \sqrt{(0\ \mathrm{m})^2+(4\ \mathrm{m})^2+(7)^2} \quad = \quad \sqrt{65}\ \mathrm{m}$$

On peut alors calculer l'angle :

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{AB}\right) \quad = \quad \cos^{-1}\left(\frac{(12\ \mathrm{m})\times(0)\ +\ (-2\ \mathrm{m})\times(4\ \mathrm{m})\ +\ (0)\times(7\ \mathrm{m})}{\sqrt{148}\ \mathrm{m}\times\sqrt{65}\ \mathrm{m}}\right) \quad = \quad \mathbf{60{,}7°}$$

retour à la question ▲